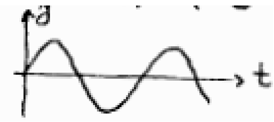
۳

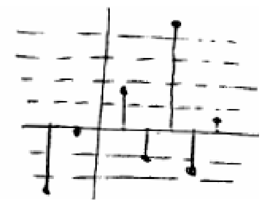
سیگنال گسسته

۱-۳ طبقه بندی سیستمها

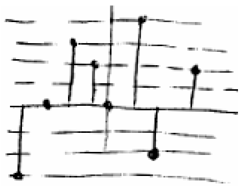
۱-سیگنال پیوسته و گسسته



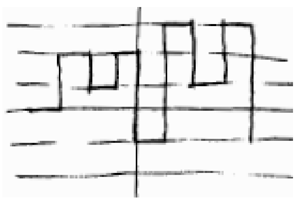
- **سیگنال پیوسته *Analog*:** سیگنالی که هم تابع و هم متغیر مستقل آن (معمولا زمان)پیوسته هستند. *$y(t)=Sin(\Omega t)$*، سیگنال های مدارهای آنالوگ در این گروه قرار دارند



- **سیگنال گسسته *Discrete*:** سیگنالی است که در آن متغیر مستقل گسسته است. در این سیگنال تابع مقدار پیوسته دارد. مانند *$y(nT)=Sin(n\omega T)$* که در آن *T* پریود نمونه برادری است. این سیگنال در مدارهای *switched capacitors*(خازنهای سوئیچ شونده) دیده می شود.



- **سیگنال دیجیتالی*Digital*:** در این نوع سیگنال ها هم متغیر مستقل و هم تابع گسسته هستند. این سیگنال در نرم افزار و سخت افزارهای دیجیتالی و کامپیوتری دیده می شود.



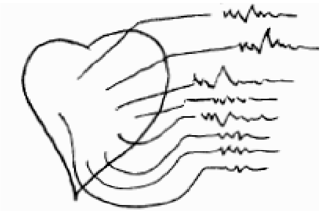
- **سیگنال کوانتیزه*Quantized*:** سیگنالی است که در آن متغیر مستقل پیوسته ولی تابع، کوانتیزه است. این سیگنال در خروجی*D/A* با *ZOH* دیده می شود.

۲-سیگنال حقیقی و کمپلکس

- **سیگنال حقیقی** سیگنالی است که مقدار آن حقیقی است *$x(n)=ASin(n\omega)$*
- **سیگنال کمپلکس :** سیگنالی است که مقدار کمپلکس (دامنه و فاز)دارد . *$x(n=Ae^{j\omega n}=ACosn\omega+jASin(n\omega)$*

۳-سیگنال تک و چند کاناله

- **سیگنال تک کاناله** :سیگنالی است که از یک منبع تولید می شود مثل ولتاژ ترموکوپل
- **سیگنال چند کاناله** :سیگنالی است که از چند کانال دریافت می شود. مانند سیگنال ۸ کاناله *ECG* که در شکل نشان داده شده



$$S(n)=\begin{bmatrix} S_1(n) \\ S_2(n) \\ \vdots \\ S_n(n) \end{bmatrix}$$

است و توسط ۸ پرب گرفته می شود.این سیگنال ها با یک بردار نمایش داده می شوند.

۴- سیگنال تک و چند بعدی

- **سیگنال یک بعدی** : این سیگنال فقط یک متغیر مستقل دارندمانند سیگنال صوت که متغیر مستقل آن زمان است.
- **سیگنال چند بعدی** :سیگنالی که دارای بیش از یک متغیر مستقل است.شدت روشنایی در یک عکس تابع مختصات نقطه (x,y)است. در یک سیگنال ویدوئی سیاه و سفید و شدت روشنایی تابعn_{tf} و هم مختصات نقطه (x,y)است در این سیگنال n_{tf}گسسته و فریم به فریم است. یک سیگنال رنگی ویدوئی سیگنالی ۳ بعدی و ۳کاناله است. $S(x,y,n)=\begin{bmatrix} r(x,y,n) \\ b(x,y,n) \\ g(x,y,n) \end{bmatrix}$

۵-سیگنال انتگرال (جمع) قدر مطلق محدود: این سیگنال ها دسته مهمی از سیگنال ها را تشکیل می دهند این سیگنال ها پایدارند و برای آنها تبدیل در میدان های مختلف وجود دارد مانند میدان S ،میدان فرکانس

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

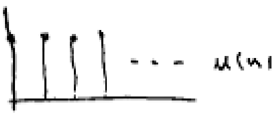
۶-سیگنال انرژی :سیگنالی است که انتگرال(جمع)توان دوم محدود دارد

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

مثال:سیگنال $x(n)=(1/2)^n u(n)$ ، سیگنال انرژی است.

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^{2n} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3} \langle \infty$$

مثال:سیگنال پله$x(n)=u(n)$ سیگنال انرژی نیست



$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} u^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

۷-سیگنال توان: سیگنالی است که توان متوسط محدود دارد.

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

مثال: سیگنال پله $x(n)=u(n)$ یک سیگنال توان است.

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} u^2(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

مثال: سیگنال کمپلکس $x(n) = Ae^{jnw}$ یک سیگنال توانی است.

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|Ae^{jnw}\right|^2 = \lim_{N\to\infty} (\frac{2N+1}{2N+1}) A^2 = A^2$$

سیگنال های پریودیک که دارای دامنه های محدود هستند، همگی سیگنالهای توان می باشند.

به این ترتیب $\delta(n)$ سیگنال انرژی ،$u(n)$سیگنال توان و $u_r(n)$ سیگنال شیبی که در آن هم انرژی و هم توان نا محدود است و نه سیگنال

انرژی و نه سیگنال توان است.

۸- سیگنال پریودیک و غیر پریودیک

- **سیگنال پریودیک** سیگنالی است که برای آن می توان نوشت

$$x(n+\ell N)=x(n)$$
$$\ell=-\infty \to \infty$$

آنگونه که $N>0$ باشد به N پریود سیگنال می گویند.

انرژی سیگنال پریودیک نامحدود است ولی اگر دامنه محدود داشته باشد توان متوسط آن محدود خواهد بود مقدار توان متوسط از رابطه مقابل بدست می آید

$$P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2$$

- **سیگنال آپریودیک:** سیگنالی که پریودیک نباشد آپرپریودیک (غیر پریودیک)است.

۹- سیگنال مزدوج متقارن و مزدوج معکوس

- **سیگنال مزدوج متقارن** :سیگنالی است که رابطه ی $x(n)=x^*(-n)$ را ارضا می کند. اگر $x(n)$ حقیقی باشد ایـن رابطـه $x(n)=x(-n)$ می گردد و به آن سیگنال زوج می گویند برای هر سیگنالی میتوان سیگنال مزدوج متقارن از رابطه ذیل بدست آورد.

$$x_{cs}=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$$

اگر $x(n)$ حقیقی باشد

$$x_e=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

- **سیگنال مزدوج معکوس**:سیگنالی است که در رابطه $x(n)=-x^*(-n)$ مقابل صدق می کند .اگر $x(n)$ حقیقی باشد به این سیگنال سیگنال فرد می گویند برای هر سیگنالی می توان سیگنال مزدوج معکوس محاسبه کرد.

$$x_{ca}=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

اگر $x(n)$ حقیقی باشد

$$x_o=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$

از سیگنالهای زوج و فرد و مزدوج متقارن و مزدوج معکوس می توان سیگنال اصلی را بدست آورد.

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n) \qquad x(n)=x_{cs}(n)+x_{ca}(n)$$

این تجزیه ها کاربرد صرفه جویی در عملیات محاسباتی را دارد.

۱۰- سیگنال طول محدود و نامحدود

- **سیگنال طول نا محدود** :سیگنالی است که طول آن نامحدود باشد مانند $(0.5)^n$ برای $n>=0$ طول این سیگنال نا محدود است.
- **سیگنال طول محدود** :سیگنالی است که طول آن محدود باشد مانند $x(n)=\{1,2,5,10\}$ که طول آن $N=4$ است.

در سیگنال های طول محدود تعریف سیگنال مزدوجمتقارن و مزدوج معکوس تغییر می کند. اگر از تعـاریف قبلـی اسـتفاده شـود و طـول $x(n)$ مقدار N باشد x_{cs} و x_{ca} طول $2N+1$ پیدا می کنند که درست نیست. لذا برای این سیگنالها سیگنال مـزدوج متقـارن پریودیـک و مزدوج معکوس پریودیک تعریف می گردد.

$$x_{pcs}=\tfrac{1}{2}\left[x(n)+x^*((-n)_N)\right]$$
$$x_{pca}=\tfrac{1}{2}\left[x(n)-x^*((-n)_N)\right] \qquad 0\le n\le N-1$$

$\langle k\rangle_N$ مقداری بین صفر تا N را بخود می گیرد. اگر k بزرگتر از N باشد، مضارب صحیح N از آن برون کـشیده مـی شـود. اگـر k منفـی

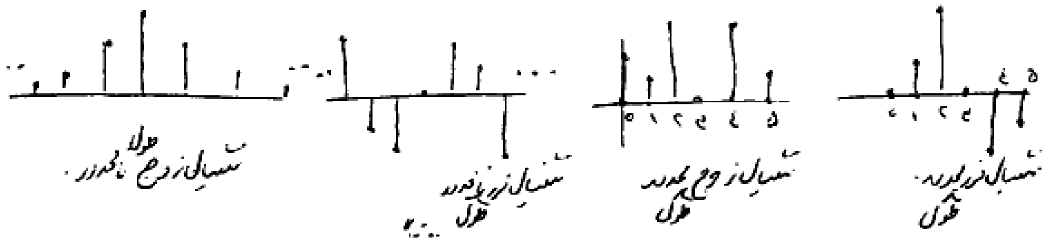
باشد، مضارب N درآن حذف و مقداری که بین 0تا $(N-1)$– که بدست می آید با N جمع می گردد.

مثال:

$<5>_8=5,$ $<8>_8=0,$ $<17>_8=1,$ $<-1>_8=7,$

$<-15>_8=1,$ $<-33>_8=7,$

مثال: شکل ها نمونه هایی از سیگنالهای فرد و زوج با طول محدود و نا محدود را نشان می دهند.



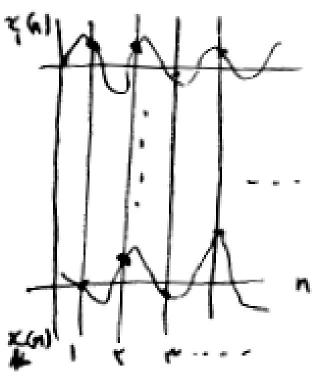
۱۱- معین و تصادفی

- **سیگنال معین *Deterministic*:**

سیگنالی است که آنرا با رابطه ای ریاضی برای تمام زمانهای از گذشته تا آینده بتوان نوشت که مقدار واقعی آنرا در هر لحظه نـشان دهـد. به عبارت دیگر سیگنال معین سیگنالی است که علم کامل به ان وجود دارد. با این تعریف بنظر می رسید که سیگنال معین وجود خـارجی نداشته باشد. ولی این امر به دقت مورد نظر بستگی دارد. اگر دقیق نباشیم بنحوی که بتوان از اثر کنتـرل نـشده عوامـل نـا خئاسـته و یـا اجتناب نا پذیر اغماض کرد، می توان سیگنال معین را تصور نمود.

- **سیگنال تصادفی *Random* :**

مقدار سیگنال تصادفی در زمان t را فقط می توان بصورت احتمالی پیش بینی کرد، اگر میانگین ، واریانس و تابع چگـالی احتمـالی آن در دسترس باشد. بنابراین پیش بینی این سیگنالها بر اساس ۲ کمیت و یک تابع قابل انجام می باشد.



برای مثال به ولتاژ نویز حرارتی یک مجموعه مقاومت همسان توجه کنید. ولتـاژ دو سـر مقاومـت نویزی است. به ولتاژ زمانی دو سر هر مقاومت تابع نمونه *sample function* می گویند$x_1(n)$. اگر تعدا مقاومتهـا L باشـد، مجموعـه L تـابع نمونـه خـواهیم داشـت کـه یـک فراینـد تـصادفی *stochastic process* را می سازند. شکل مجموعه مشاهدات این فرایند را نـشان مـی دهـد. مجموعه مشاهدات $x_{l=i}(n=1...N)$ همچنانکه اشاره شد، یک تابع نمونهN تایی است که L تـا از آنها موجود است. ازطرفی $x_{l=1...L}(n=j)$ یک مجموعه Lتایی متغیر تصادفی است که N تا از آنهـا وجود دارد. همچنین $x_{l=i}(n=j)$ یک عدد است.

مقدار میانگین و واریانس متغیر تصادفی اینگونه بدست می آید.

$$\overline{X}(i) = E(X(i)) = \int_{-\infty}^{\infty} xP_X(x,i)dx = m_{x(i)}$$

$$\sigma_{x(i)}^2 = E(X^2(i)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_X(x,i)dx$$

در تحلیل آماری مقدار میانگین و واریانس اینگونه محاسبه می گردد.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n(i), \sigma_{x(i)}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x_n(i) - m_{x(i)})^2$$

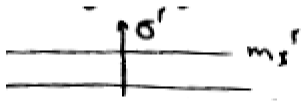
فرایند تصادفی که در آن میانگین و واریانس مستقل از n باشند، فرایند تصادفی ایستا است به این معنی که

$$\sigma_{X(i)}^2 = \sigma_X^2, \hat{m}_{X(i)} = \hat{m}_X$$

است. اگر سیگنال ارگودیک باشد، میانگین و واریانس را می توان از میانگین و واریانس تابع نمونه بدست آورد.

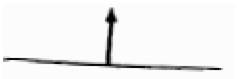
$$\hat{m}_x = 1/N \sum_{n=0}^{\infty} x_i(n), \qquad \sigma_x^2 = 1/N \sum_{n=0}^{\infty} (x_i\,(n) - \hat{m})^2, \qquad P_X = E(X^2) = \sigma_X^2 + m_X^2$$

به فرایند تصادفی که تابع خود همبستگی آن تابع ضربه است $\delta(l)$ فرایند تصادفی سفید می گویند.



$$\varphi_{xx}(\ell) = E(x(n)x(n-\ell)) = \sigma^2\delta(\ell) + m_X^2$$

فرایند تصادفی سفید که میانگین آن صفر باشد، نویز سفید خوانده می شود.

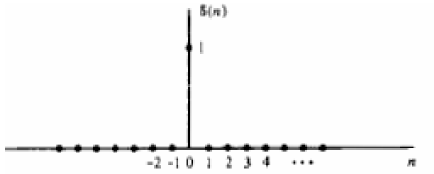


$$\varphi_{xx}(\ell) = \sigma^2\delta(\ell)$$

سیگنال تصادفی یک سیگنال انرژی و یا یک پریودیک توانی نیست که بتوان برای آن فوریه نوشت، ولـی تـابع خـود همبـستگی آن دارای تبدیل فوریه هست و بخش مهمی از اطلاعات سیگنال را با خود دارد.

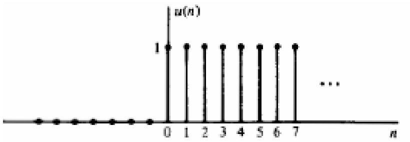
۳-۲ دنباله های اصلی (سیگنال های گسسته)

۱-دنباله ضربه واحد



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

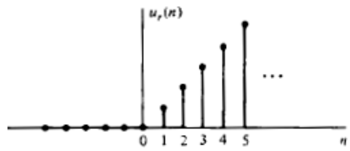
۲-دنباله پله واحد



$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

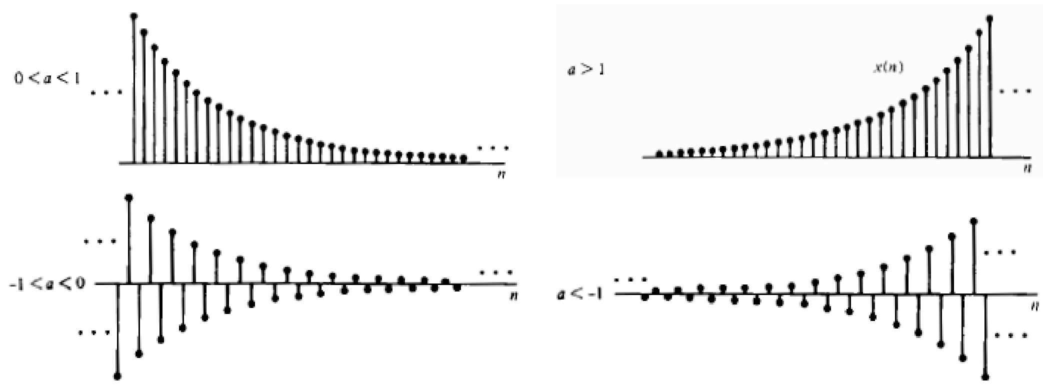
دنباله پله واحد و دنباله ضربه واحد با روابط مقابل به یکدگر مرتبط می شوند

۳-دنباله شیبی واحد



$$u_r(n) = \begin{cases} n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

۴-دنباله اکسپونالنیل اگر A و a حقیقی باشند دنباله $x(n)=Aa^n$ یک دنباله اکسپونانسیلی حقیقی است.



۵-دنباله های مثلثاتی: سیگنال مثلثاتی آنالوگ مثلا با$ACos(\Omega t+\theta)$ بیان می شود که A دامنه $\Omega=2\pi F$ فرکانس زاویه (رادیان بر ثانیه)،F فرکانس (هرتز) و θ فاز بر حسب رادیان است این سیگنال ها ،سیگنال های پریودیک با پریود $T=1/F$ هستند. هرچه F بزرگ تر باشد فرکانس نوسانات بیشتر است . این مشخصات را سیگنال کمپلکس$Aexp(j(\Omega t+\theta)$ نیز دارد. در نمایش برداری، سیگنال مثلثاتی را بصورت

$$ACos(\Omega t+\theta) = A\frac{e^{j(\Omega t+\theta)}+e^{-j(\Omega t+\theta)}}{2}$$

می نویسند که کسینوس از مجموع دو بردار که یکی بافرکانس زاویه Ω و دیگری با فرکانس زاویه Ω- است بدست می آید اگرچه Ω در اصل یک کمیت مثبت است ولی تعریف Ω- صرفا به منظور تسهیل ریاضی معرفی می گردد.

وقتی سیگنال پیوسته بصورت گسسته نوشته شود رابطه به شکل

$ACos(\Omega nTs+\theta)=ACos(n\omega+\theta)$

در می آید. به ω در اینجا فرکانس زاویه با دیمانسیون رادیان بر نمونه (فرکانس نمونه گیری) می گویند چرا که $\omega=\Omega Ts$ یا $\omega=\Omega/Fs$است ماهیت فرکانس در ωبا Ωفرق دارد. معادل دیجیتالی فرکانس آنالوگ F فرکانس دیجیتالی $fd=F/Fs$ است که حاصل نسبت با فرکانش نمونه برداری است. فرکانس دیجیتالی فقط مقدار بین۰ تا ۱را به خود می گیرد، به همین ترتیب ω نیز مقادیر بین ۰ تا 2π را به خود می گیرند، چرا که دو فرکانس $\omega0$ و ωk که $\omega k=\omega 0+2k\pi$ باشد از یکدیگر قابل تمییز هستند. بنابراین در سیگنال های گسسته حداکثر فرکانس سیگنال فرکانس بالا، $\omega=\pi$ است. با این توضیحات سیگنال های فرکانس پائین سیگنال هایی هستند که $\omega=2k\pi$و فرکانس بالایی آنهایی هستند که $\omega=(2k+1)\pi$ دارند.

پریود و فرکانس سیگنال گسسته : فرکانس دیجیتالی معادل فرکانس آنالوگ *F* برابر *fd=F/Fs* است که بصورت کسری *fd=k/N* بدست می آید که در آن *N* پریود اصلی سیگنال است. این امر با سیگنال گسسته که *F=1/T* است تفاوت پیدا می کند. اگر *fd* کسری نباشد سیگنال پریودیک نیست، در رابطه

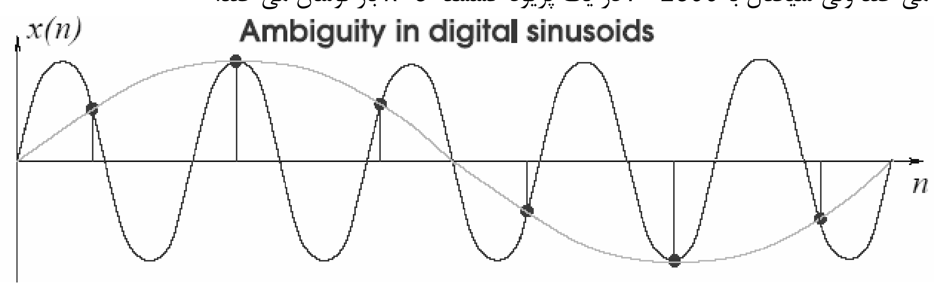
$$Cos(\sqrt{3}n+\theta) \Rightarrow \omega=\sqrt{3} \Rightarrow f_w=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\neq\frac{k}{N}$$

که *fd* کسری نیست برای *N* عدد صحیح بدست نمی آید و سیگنال گسسته مربوطه پریودیک نیست. ولی در *Cos(nπ/3+θ)* مقدار *fd=ω/(2π)=π/(2*3*π)=1/6=k/N* بدست می آید که *N=6* و *k=1* است.

مثال:سیگنال *Cos(2π*Ft)* با فرکانسهای ۵۰۰ و ۲۵۰۰ با فرکانس ۳۵۰۰هرتز نمونه برداری می شوند مقدار پریود سیگنال گسسته را بدست آورید.

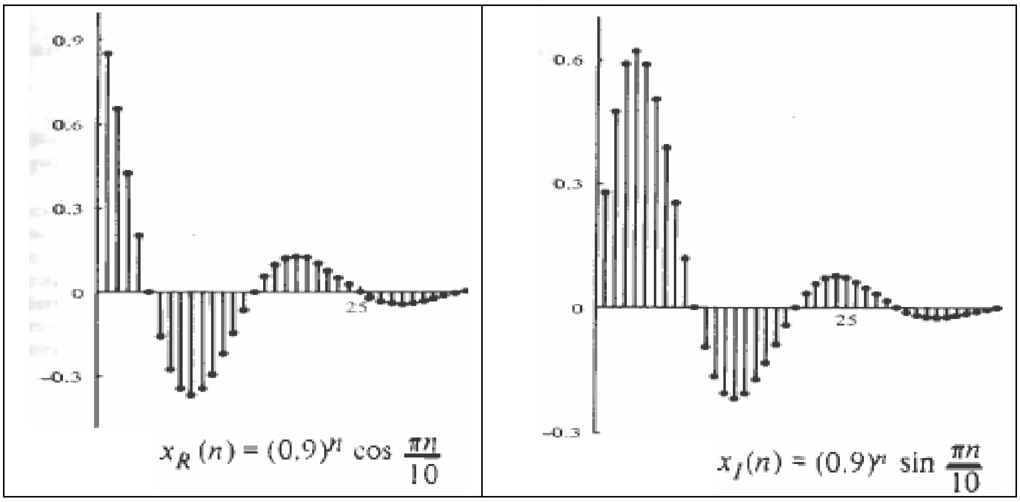
حل: وقتی *F=500* است فرکانس دیجیتالی *fd=500/3500=1/7* بدست می آید که *N=7* و *k=1* می گردد. شکل نقاط پریود را نشان می دهد.

وقتی *F=2500* باشد فرکانس دیجیتالی *fd=2500/3500=5/7* بدست می آید که *N=7* و این بار *k=5* است. در هر دو حال پریود سیگنال گسسته *N=7* است ولی تفاوت در مقادیر *k* است. مفهوم این تفاوت از اینقرار است که: سیگنال با *F=500* در یک پریود گسسته *k=1* بار نوسان می کند ولی سیگنال با *F=2500* در یک پریود گسسته *k=5* بار نوسان می کند.



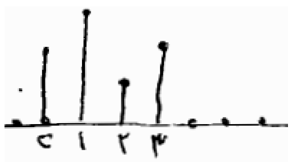
۶- سیگنال اکسیونانسیل کمپلکس

$$x(n)=|A|e^{j\varphi}\,|a|^n\;e^{j(n\omega+\varphi)}=|A||a|^n\;[\cos(n\omega+\varphi)|\;j\sin(n\omega+\varphi)]$$



۷- نمایش یک دنباله دلخواه: هر سیگنال دلخواه را می توان بصورت مجموعه ای از توابع ضربه با تاخیر نوشت.

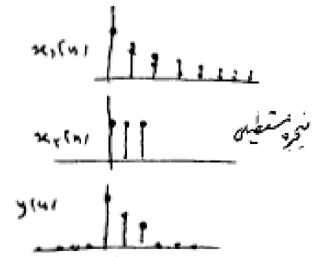
$x(n)=\delta(n)+1.5\delta(n-1)+0.5\delta(n-2)+\delta(n-3)$



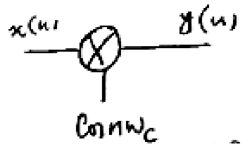
۳-۳ عملیات کلاسیک پردازش

۳-۳-۱ ضرب دو سیگنال

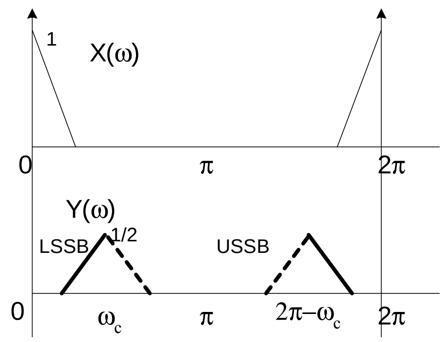
از ضرب دو سیگنال *x1(n)* و *x2(n)* سیگنال جدید بدست می آید *y(n)=x1(n)*x2(n)* که ۲ نوع کاربرد دارد.



۱- **اعمال پنجره** و تولید سیگنال طول محدود: اولین استفاده از ضرب تولید سیگنال طول محدود از سیگنال طول نامحدود در این مورد استفاده مثلا سیگنال *x2(n)* سیگنالی دلخواه با طول محدود که در *x1(n)* با طول نامحدود ضرب شده و سیگنال طول محدود جدیدی را بدست می آید به این عمل اعمال پنجره بر سیگنال می گویند.



۲- **مدولاسیون** و دمدولاسیون: یکی از کاربردهای ضرب، عمل مدولاسیون است که به نرم افزار یا سخت افزار انجام دهنده آن مدولاتور می گویند. از کاربردهای مدولاسیون انتقال سیگنال از باند پایه به باند فرکانس حامل (انتشار) است. مدولاسیون دامنه سیگنال گسسته بصورت زیر نوشته می شود

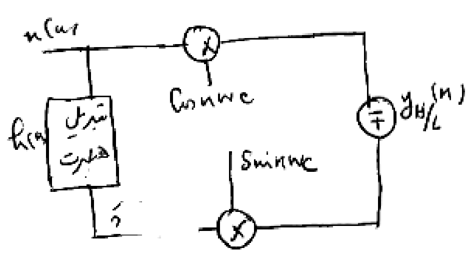


$y(n)=x(n)Cos(n\omega_c)$

در این رابطه ω_c فرکانس حامل ، $Cos(n\omega_c)$ سیگنال حامل ، *x(n)* سیگنال مدوله کننده و *y(n)* سیگنال مدوله شده است . طیف فرکانس سیگنال مدوله شده نسبت به مدوله کننده از این قرار است .

$Y(\omega)=1/2[X(\omega-\omega c)+X(\omega+\omega c)]$

طیف مدولاسیون بصورت *Double Side Band(DSB)* است. وقتی سیگنال حقیقی است. بدلیل تقارن در طیف ، نیمی از طیف اضافی است که می توان آن را حذف و در پهنای باند صرفه جویی نمود. یعنی بجای *DSB* می توان از *Single Side Band(SSB)* سود برد. شکل طیف *Upper SSB* را نقطه چین و *Lowers SSB* را با خط پر نشان داده است. برای ایجاد *U/L SSB* از مدار شکل می توان استفاده کرد.



تبدیل هیلبرت *Hilbert Transform* دارای مشخصات ذیل است

$$H(\omega)=\begin{cases}-j & 0\le\omega\le\pi\\ j & -\pi\le\omega\langle 0\end{cases}\Rightarrow h(\omega)=\begin{cases}0 & n=0\\ \dfrac{2Sin^2(n\pi/2)}{n\pi} & n\ne 0\end{cases}$$

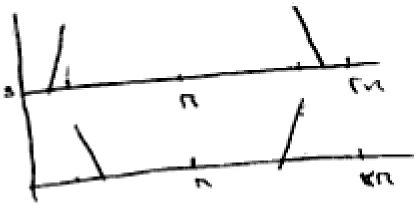
و تبدیل هیلبرت پیوسته از اینقرار است .

$$H(\Omega)=\begin{cases}-j & \Omega\ge 0\\ j & \Omega\langle 0\end{cases}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{\pi t}$$

$$Y_{H/L}(n)=x(n)Cos(n\omega_C)-/+x(n)Sin(n\omega_C)\Rightarrow$$

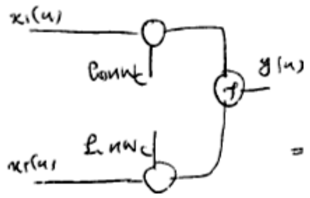
$$Y_{H/L}(\omega)=\tfrac{1}{2}\left[x_1(\omega-\omega_C)+x_1^*(\omega-\omega_C)+x_1(\omega+\omega_C)+x_1^*(\omega+\omega_C)\right]\mp$$

$$\frac{1}{2j}\left[-jx_1(\omega-\omega_C)+jx_1^*(\omega-\omega_C)-(-j)x_1(\omega+\omega_C)-jx_1^*(\omega+\omega_C)\right]$$



$$\Rightarrow Y_H(\omega) = x_1(\omega+\omega_C) + x_1^*(\omega-\omega_C)$$
$$Y_L(\omega) = x_1(\omega-\omega_C) + x_1^*(\omega+\omega_C)$$

Quadrature Amplitude Modulation(QAM)

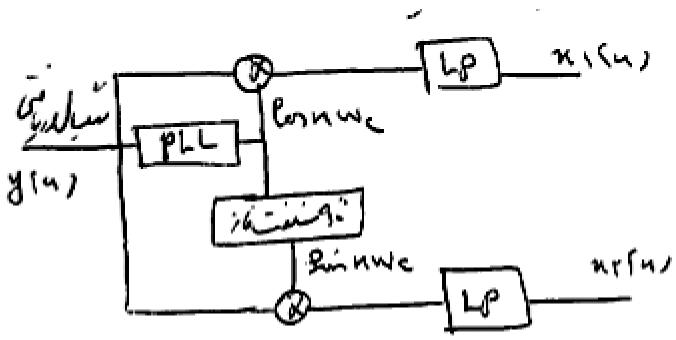


در این روش مدولاسیون هر باند کناری به یک سیگنال اختصاص می یابد به نحویکـه دو سـیگنال متفاوت *DSB* را اشغال می کنند. شکل روش مدولاسیون *QAM* را نشان می دهد.

$y(n)=x_1(n)Cosn\omega_c+x_2(n)Sinn\omega_c$

$$X(\omega) = \tfrac{1}{2}[X_1(\omega-\omega_C) + X_1(\omega+\omega_C)] - \tfrac{j}{2}(X_2(\omega-\omega_C) + X_2(\omega+\omega_C)]$$

علیرغم اینکه دو طیف با یکدیگر همپوشانی دارند. امکان بازسازی هر دو سـیگنال و دمدولاسـیون وجود دارد که شکل آنرا نشان می دهد.



$$x_1(n) = y(n)Cosn\omega_C = \tfrac{1}{2}x_1(n) + \tfrac{1}{2}x_1(n)Cos(2n\omega_C) + \tfrac{1}{2}x_2(n)Sin(2n\omega_C) \overset{LPfiltered}{=} \tfrac{1}{2}x_1(n)$$

$$x_2(nu) = y(n)Sinn\omega_C = 2x_1(n)Sin(2n\omega_C) + \tfrac{1}{2}x_2(n) - \tfrac{1}{2}x_2(n)Sin(2n\omega_C) \overset{LPfiltered}{=} \tfrac{1}{2}x_2(n)$$

۲-۳-۳ کانولوشن دو سیگنال:

کانولوشن در سیگنال *x1(n)* و *x2(n)* اینگونه تعریف می شود.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

این رابطه یکی از پر استفاده ترین عملیاتی است که روی سیگنال ها صورت می گیرد. این رابطه نحوه تاثیر سیستمها بـر سـیگنال ورودی را تعیین می کند. برای مثال چگونگی رفتار فیلتر بر سیگنال ورودی در میدان زمان با این رابطه بیان می شود که *x1(n)* سیگنال ورودی *x2(n)*پاسخ ضربه فیلتر باشد.

۳-۳-۳ تبدیل سیگنال به تابع کمپلکس خاص

:بخش مهمی از اطلاعات سیگنا ل حقیقی که در طبیعت وجود دارد از این عمل استخراج می گردد. یک نمونه از این توابع فوریه است.

$$X(\omega) = Fourieh(x(n)) = |X(\omega)|e^{-j\theta}$$

۴-۳-۳ همبستگی***Correlation***

کورلیشن عملیات روی دو سیگنال است که یکی از اهداف عملیاتی آن تعیین شباهت بین دو سیگنال است. فـرض کنیـد سـیگنال *x(n* (ارسال و بعد از مدتی سیگنال *y(n)* همراه با نویز دریافت شود. برای تشخیص اینکه سیگنال دریافتی ناشی از انعکاسات سـیگنال ارسـالی

بوده است کورلیشن به کار گرفته می شود.

کورلیشن بین دو سیگنال *x(n)* و *y(n)* اینگونه تعریف می شود.

$$r_{xy}(\ell)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-\ell)$$

بـه ایـن رابطـه همبـستگی متقابـل *cross correlation* مـی گوینـد بـه کورلیـشن سـیگنال *x(n)* بـا خـودش خـود همبـستگی *autocorrelation* می گویند.

$$r_{xx}(\ell)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-\ell)$$

برای سیگنال پریودیک با پریود *N* این دو رابطه روی یک پریود تعریف می شود که خود نیز پریودیک است

$$r_{\tilde{x}\tilde{y}}(\ell)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\tilde{y}(n-\ell)$$

و برای سیگنال توانی نیزاینگونه نوشته می شود.

$$r_{xy}(\ell)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x(n)y(n-\ell)$$

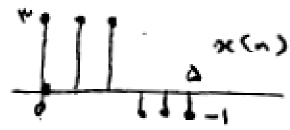
برای سهولت مقایسه این دو تابع را بصورت نرمال شده می نویسند.

$$\rho_{xx}(\ell)=\frac{r_{xx}(\ell)}{r_{xx}(0)}\qquad\qquad \rho_{xy}(\ell)=\frac{r_{xy}(\ell)}{\sqrt{r_{xx}(0)\,r_{yy}(0)}}$$

مهمترین خاصیت کورلیشن :محاسبه کورلیشن رامی توان بوسیله کانولوشن انجام داد. $r_{xy}(l)=x(n)*y(-n)$ و می توان نشان داد که

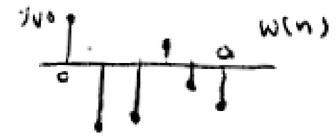
$$\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}\geq\left|r_{xy}(\ell)\right|,\ r_{xx}(0)\geq r_{xx}(\ell)$$

است نتیجه این خواهد بود.که $\rho_{xx}(l)$ و $\rho_{xy}(l)$ دارای ماکزیممی (اگر حالت تساوی برقرار نشود)برابر۱ خواهند بود.



مثال:سیگنال *x(n)* بعد از یک ثانیه همراه با مقداری نویز دریافت می شود. کورلیـشن متقابـل *x* و*y* چه چیز را نشان می دهد.

جواب:



x(n)={3,3,3,-1,-1,-1}, *w(n)={0.75,-1.4,-1.1,0.4,-0.42,-0.7}*

y(n)=x(n-1)+w(n) *n=0,….*

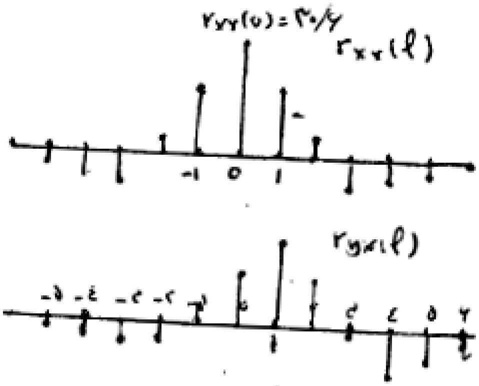
$$r_{xy}(\ell)=\frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)x(n-\ell)=\frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x(n-1)+w(n))X(n-l)=$$

$$\frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-1)(n-\ell)+\frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}w(n)x(n-\ell)=r_{xx}(\ell-1)+r_{wx}(\ell)$$

r_{xx} و r_{wx} هر یک طول *2N-1=11* دارند ولی در حاصلجمع $r_{xx}(l-1)$شرکت کرده است پس $r_{yx}(l)$ طـول ۱۱ واحـدی دارد مقـادیر بدسـت آمده $r_{yx}(l)$ برابرند با

$$r_{yx}(\ell)=\{-0.75,-2.65,-4.25,-9.85,3.97,13.27,22.42,11.94,-0.52,-12.32,-8.1,3.42\}$$

دیده می شود که *rxx(0)=30.6* ماکزیمم می دهد همچنانکه انتظار می رفت*rxy(l)*.ماکزیممی در*l=1* می دهد. این بـه آن معنـی اسـت که سیگنالی مشابه *x(n)* در*l=1* دریافت شده است و این چیزی است که *y(n)=x(n-1)+w(n)* از قبل آنرا داده بود.



محاسبه تابع همبستگی با استفاده از MATLAB

r_{xy}=conv(x,fliplr(y))

به سادگی می توان نشان داد که

۱) *Ex=rxx(0)* انرژی سیگنال

۲) *Px=rxx(0)* توان سیگنال پریودیک

۳) برای سیگنال های حقیقی *rxy(l)=ryx(-l)* است بنابراین برای محاسبه تابع همبستگی فقط *l* های منفی کفایت می کند

۴) اگر طول دو سیگنال محدود و *L* و *M* باشند مانند کانولوشن طول کورلیشن *L+M-1* است

۵) همبستگی سیگنال پریودیک :تابع همبستگی سیگنا ل پریودیک خود پریودیک است. از این خاصیت می توان برای تعیین پریود سیگنال های پریودیک آلوده به نویز استفاده کرد در این حال پریود سیگنال فاصله بین دو ماکزیمم متوالی در تابع همبستگی است.

۶) اگر سیگنال *x(n)* از سیستمی با تابع ضربه *h(n)* عبور کند خروجی *y(n)* بدست می آید. بین توابع همبستگی آنها روابط ذیل بر قرار است.

$ryx(l)=y(l)\otimes x(-l)=h(l)\otimes rxx(l)$, $\qquad ryy(l)=y(l)\otimes y(-l)=rhh(l)\otimes rxx(l)$

۷) *rxx(0)* انرژی سیگنال را نشان می داد میتوان ثابت کردکه اگر سیگنال ایستا و غیر پریودیک باشد *rxx(∞)* برابر میانگین سیگنال می گردد.

$Ex=rxx(0)$, $\qquad |m_x|^2=rxx(\infty)$

۸) کوواریانس: مشابه تابع همبستگی تابع دیگری به نام کواریانس مورد استفاده قرار می گیرد. کوواریانس خودی و متقابل اینگونه تعریف می گردد.

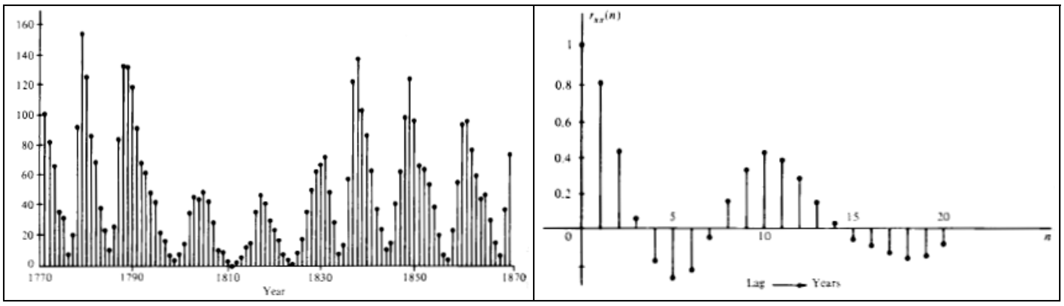
$$C_{xy}(\ell)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x(n)-m_x)(y(n-\ell)-m_y)$$

$$C_{xx}(\ell)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x(n)-m_x)(x(n-\ell)-m_x)$$

همچنانکه از رابطه می توان نتیجه گرفت $\sigma_x^2=cxx(0)$ واریانس سیگنال *x(n)* می باشد و یا می توان نوشت:

$rxx(0)=cxx(0)+|m_x|^2$

مثال :سیگنال آلوده به نویز و تابع همبستگی آن داده شده است، پریود سیگنال چقدر است؟.



جواب: اگر پریود از سیگنال دریافت شده اندازه گیری شود در هرقسمت مقداری بدست می آید. که با یکدیگر برابر نیستند. این کار را روی شکل سیگنال دریافتی انجام دهید. ولی از تابع همبستگی تخمین بهتر (واریانس کمتر) از پریود بدست می آید که عدد ۱۰ به راحتی در آن قابل اندازه گیری است.

مثال: همبستگی خودی تابع $0<a<1$ $x(n)=a^n u(n)$ و همبستگی خودی نرمال شده آنرا بدست آورید.

$$r_{xx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n-l)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-l) \Rightarrow$$

برای $l \geq 0 \Rightarrow r_{xx}(l)=\sum_{n=l}^{\infty} a^n a^{n-l}=a^{-l}\sum_{n=l}^{\infty}(a^2)^n \underset{0<a<1}{=} \frac{(a^2)^l-(a^2)^{\infty+1}}{1-a^2}\times a^{-l}=\frac{a^l}{1-a^2}$

برای $l<0 \Rightarrow r_{xx}(l)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n a^{n-l}=a^{-l}\sum_{n=0}^{\infty}(a^2)^n=\frac{a^{-l}}{1-a^2}$

$\Rightarrow$ برای l ها $\Rightarrow r_{xx}(l)=\frac{1}{1-a^2}a^{|l|}$

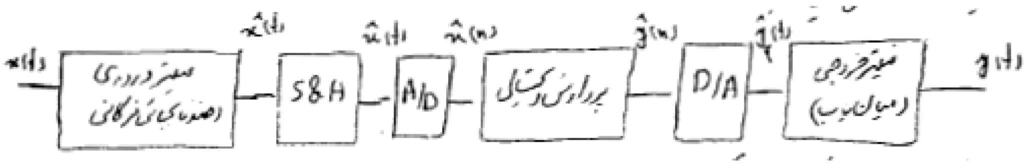
$E_x=r_{xx}(0)=\frac{1}{1-a^2}$ $\qquad \rho_{xx}(l)=\frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)}=a^{|l|} \qquad -\infty<l<\infty$

۳-۴ تبدیل سیگنال آنالوگ به گسسته و بر عکس

۳-۴-۱ منشا سیگنال گسسته

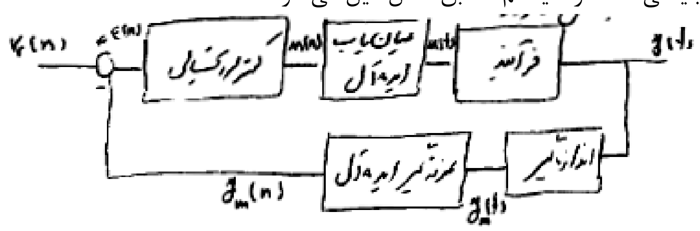
منشا سیگنال گسسته ممکن است سیستمهای گسسته و یا نمونه گیری از سیگنال های پیوسته باشد. اکثر سیگنال هایی که برای پردازش مورد علاقه هستند سیگنال هایی پیوسته هستند مانندسیگنال زلزله، صوت، موسیقی، ویدوئی، سونار، رادار، بیو لوژیکی وغیره. بعضی از سیگنال ها مانند سری های زمانی که مسائل اقتصادی و اجتماعی را مورد تحلیل قرار می دهد به لحاظ ماهیت اطلاعاتی آماری هستند که خود گسسته می باشند.

انجام پردازش دیجیتالی روی سیگنال پیوسته مستلزم دیجیتالی کردن سیگنال سپس انجام پردازش و در نهایت تبدیل خروجی به سیگنال پیوسته است که در دنیای واقعی مورد نیاز است. شکل زیر این ساختار را نشان می دهد.



این ساختار را از نظر عملکرد می توان اینگونه خلاصه کرد.

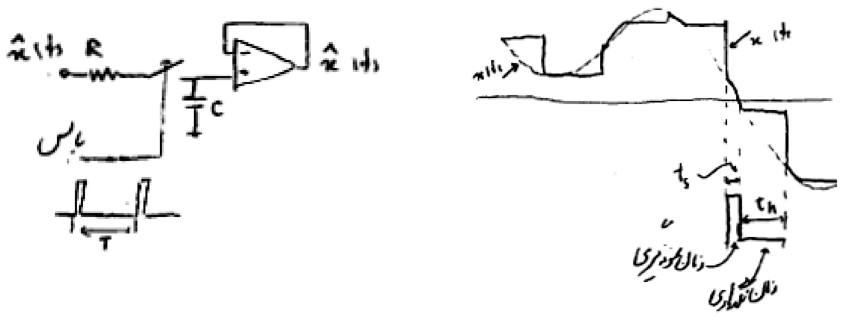
اما در یک سیستم کنترل دیجیتالی ساختار سیستم مطابق شکل ذیل می گرد.



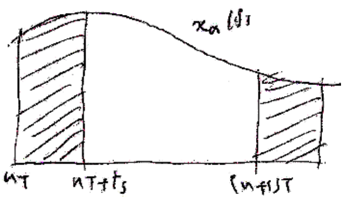
۳-۴-۲ مدار *S&H*

شکل، مدار ساده شده *Sample&Hold* (نمونه گیری و نگهداری) را نشان می دهد پالس ساعت با پریود *T* به سوئیچ الکتریکی اعمال می گردد وقتی پالس در حالت۱ است سوئیچ بسته شده و خازن توسط ورودی شارژ می شود. وقتی پالس در حالت *0* است سوئیچ باز شده و از آنجا که خازن راهی برای تخلیه ندارد ولتاژ را در خود ثابت نگه می دارد وجود بافر برای این است که خازن در مدت نگهداری دشارژ نشود. به پریود *T* پریود نمونه گیری و به*F=1/T* فرکانس نمونه گیری می گویند.

انتظاری که از این مدار می رود آن است که قرار است در زمانهای ***nT+ts*** خروجی ***S&H*** برابر باشد با ***xd(nT+ts)=xa(nT+ts)*** باشد



(در زمان نمونه گیری ورودی را دنبال کند) ولی به دلیل مقاومت خروجی مداری که ***x(n)*** را تامین می کند و مدت زمان ***ts*** عملا از



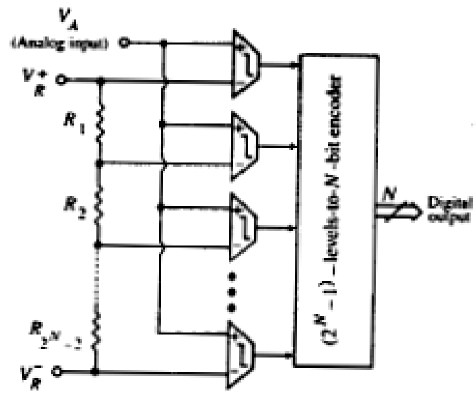
سیگنال ورودی در مدت زمان نمونه گیری انتگرال گرفته می شود، یعنـی بجـای *$x_a(nT+ts)$*

$$\frac{1}{t_s}\int_{nT}^{nT+t_s} x_a(t)\,dt$$

مقدار را خواهیم داشت که عامل خطا است برای رفع این خطـا زمـان*ts* نسبت به *T* باید حتی الامکان کوچک باشد در ضمن مقاومت مداری که خازن را شارژ می کند (*R*) کوچک باشد.

۳-۴-۳ مبدل آنالوگ به دیجیتال Analog to Digital Converter (ADC)

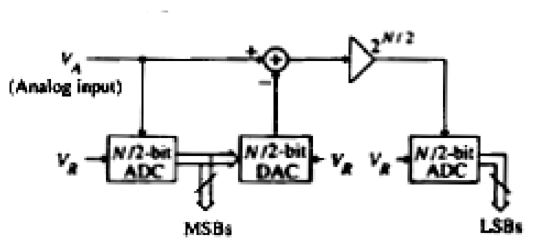
این مبدل ها کار خود را در هر پریود و از زمان *ts* شروع کرده و سیگنال نمونه گیری شده گسسته را به سیگنال دیجیتالی تبـدیل مـی کند. *ADC*دو مشخصه مهم دارند یکی تعداد بیتها که رزولوشن آنها را تعیین میکند و دیگری زمان تبـدیل (*conversion time*)اسـت. زمان تبدیل*ADC* باید کمتر از *th* باشد تابتواند مدار درست کار کند. علاوه بر این بعضی از *ADC*ها خروجی سریال بجای مـوازی تولیـد می کند .*ADC*هابراساس زمان تبدیل غالبا طبقه بندی می شوند و هر چه سریعتر باشد قیمت بالاتری دارد و عموما مصرف انرژی بالاتری نیز دارد. انواع *ADC* ها از اینقرارند.



۱)مبدل *ADC*از نوع فلش*Flash*

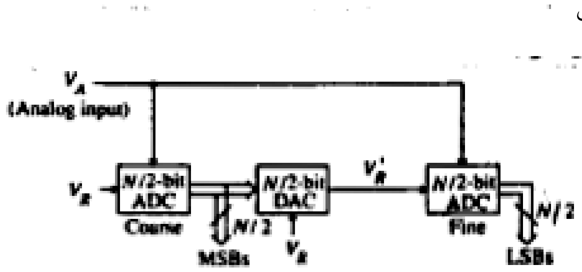
شکل ساختمان مبدل فلش را نشان می دهد برای داشتن *N* بیت خروجی به*2^N-1* مقایسه کننده نیاز است که*2^N-1* خروجی صفر یا یک تولید می کند. ایـن خروجـی به انکودری اعمال می شود تا *N* بیت خروجی تولید گردد. این مبدل بسیار سـریع است ولی سخت افزار بزرگی دارد لذا برای رزولوشن های کمتـر از ۸ بیـت اسـتفاده می شود.

۲)مبدل سری – موازی



به منظور استفاده از سرعت مبدلهای فلش و نیز کاهش سخت افـزار مـدار از ۲ تا *N/2* مبدل فلش استفاده می گردد. به ایـن ترتیـب در مقابـل افـزایش اندکی در زمان تبدیل، کاهش قابل توجهی در سخت افزاز پدید می آید.

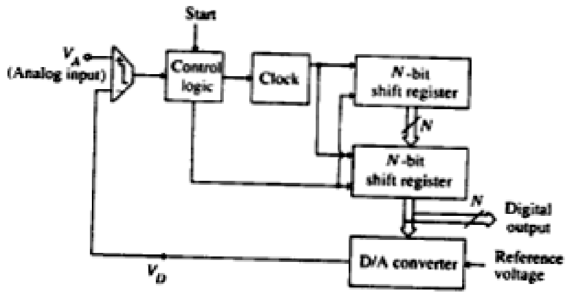
a)در روش اول سیگنال به یکی از *N/2* بیـت مبـدلها اعمـال مـی شـود تـا *MSB* ها بدست آیند خروجی علاوه بر ایـن بـه*N/2* بیـت *DAC* اعمـال و سیگنال خروجی از ورودی کم شده و بعد از تقویت با بهره *$2^{N/2}$* بـه دومـین *ADC* اعمال تا *LSB* بدست آیند.



b)در روش دوم ابتدا سیگنال به یکی از *ADC* هـا اعمـال تـا *MSB* هـا بدست آیند سپس *MSB* ها به *DAC* اعمـال مـی گـردد و خروجـی آن بعنوان ولتاژ مرجع برای دومین *ADC* استفاده می شود. با تعمـیم طـرح های فوق می توان برای داشتن *N* بیت مبدل آنالوگ بـه دیجیتـالی از*N* مبدل ۱بیتی طبق توضیحات فوق استفاده کرد کـه بـه آن *Pipelined ADC* می گویند.

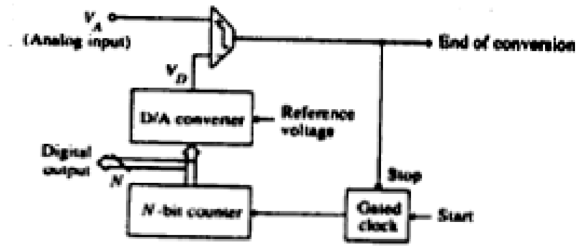
۳)مبدل تقریب متوالی

این روش براساس سعی و خطا عمل می کنند به این ترتیب که خروجی تولیدی به *DAC*اعمال می گردد و با ورودی مقایسه می شود اگر خروجی کمتر از ورودی باشد در اولین پالس ورودی ۱وارد شیفت ریجیسترها می گرد و اگر خروجی بزرگتر از ورودی باشد بیت صـفر وارد



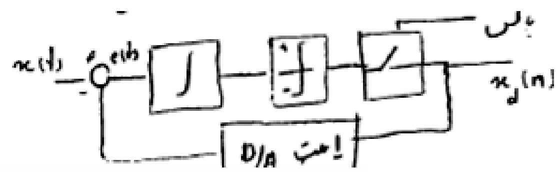
آن می شود. این عمل تا برابر شدن ورودی و خروجی ارائه می یابد این نوع مبدل برای رزولوشن های بالا با قیمت مناسب ساخته شده است و برای اکثر کارهای پردازش سیگنال مناسب است.

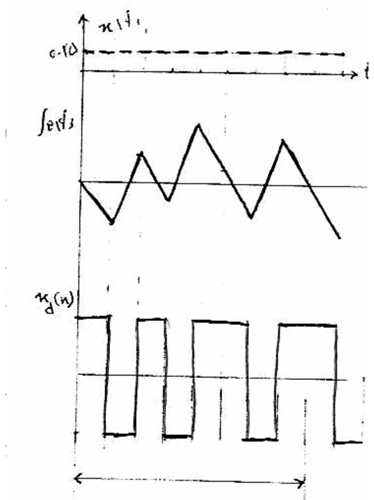
۴)مبدل شمارشی Counting ADC



در این مبدل شمارنده ای شروع به شمارش می کند و به محض اینکه ورودی و خروجی برابر گردند شمارش متوقف می شود.مدت زمان تبدیل این ADC برابر $T(2^N-1)$ است که T پریود پالس ساعت است. به دلیل بزرگ بودن زمان تبدیل، برای رزولوشن های بالا فقط در کاربردهای سرعت پائین کاربرد دارد.

۵)مبدل فرا نمونه گیر سیگما یا ولتا:



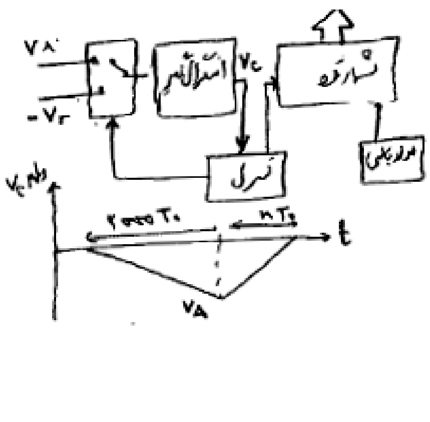


در این مبدل سرعت نمونه برداری بسیار بالاتر از حد نیاز در نظر گرفته می شود و مدار مطابق شکل مقابل است.

فرض کنید سیگنال $x(t)$ محدود به دو سطح $\pm v$ باشد . سیگنال وارد انتگرال گیر و سپس به مقایسه کننده ای اعمال میگردد و خروجی مقایسه کننده مقادیر $\pm v$ را می تواند به خود بگیرد. در پالس های مشخص که پریود آن بسیار بالاتر از حد مورد نیاز است خروجی مقایسه کننده در خروجی ظاهر می گردد.شکل T نحوه کار مدار را وقتی $x(t)=0.25$ باشد نشان می هد. اگر محدوده تغییرات $x(t)$ با محدوده تغیرات مقایسه کننده متفاوت باشد، در فیدبک می بایستی عمل تطبیق صورت گیرد(با DAC یک بیتی).

این مبدل اگر قرار باشد رزولوشن ۸بیتی داشته باشیم پریود نمونه گیری باید حدود $2^8=256$ برابر پریود حداقل نمونه گیری باشد. از آنجا که فرکانس نمونه گیری بسیار بالا بدست می آید این مبدل برای سیگنال های فرکانس پائین و صوتی و مشابه آن استفاده می شود .با اعمال فیلتر LP بر $xd(n)$ سیگنال $x(t)$ بازسازی می گردد.

۶)مبدل شیب دوگانه Dual Slope



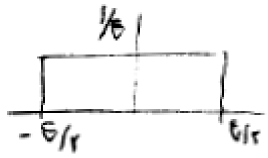
این مبدل به دلیل سرعت پایین برای کاربردهای کند مثل نمایشگر های دیجیتالی استفاده می شود. شکل نحوه عمل آنرا نشان می دهد. در مدت زمان $2000T$ (در $31/2$رقمی) ورودی به انتگرال گیری اعمال می شود که خازنی زا شارژ می کند. . سپس انتگرال گیر به ولتاژ مرجع وصل می شود تا خازن دشارژ گردد. شمارنده مدت دشارژ n را اندازه گیری می کند. خروجی شمارنده متناسب با نسبت سیگنال ورودی به ولتاژ مرجع است.

$$2000TVi=nTVr\Rightarrow n=2000Vi/Vr$$

اگر ولتاژ مرجع درست انتخاب گردد n متناسب با مقدار سیگنال ورودی است.

عوامل خطا در مبدل های ADC :

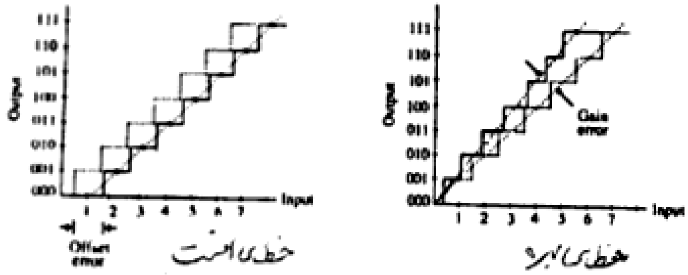
۴نوع عامل خطادر مبدل های ADC وجود دارند که عبارتند از :



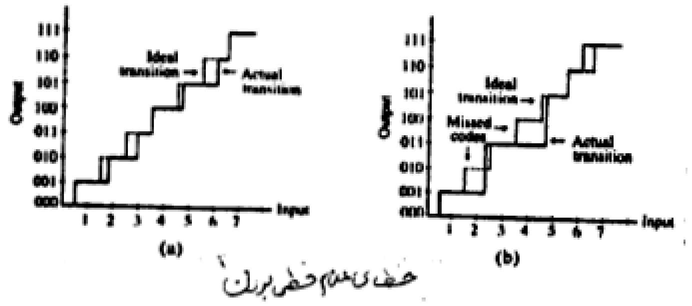
۱.**خطای کوانتیزه شدن** :این خطا تفاوت در مقدار هایی سیگنال ورودی آنالوگ و خروجی دیجیتالی است مقدار این خطا $-\delta/2<=e(n)<=\delta/2$ است که δ ارزش LSB باشد. برای تحلیل اثر این خطا در رفتارسیستم آن را بصورت نویز یکنواخت، تابع چگالی مطابق شکل در نظر می گیرند و به ورودی کوانتیزه اضافه می نمایند.

۲.**خطای offset**: ADC های واقعی از این خطا متاثر هستند که بدلیل وجود المانهای فعال در ساختارADC است. این خطا باعث می شود که ورودیADC بصورت $x(t)\pm Voffset$ ظاهر شود. این خطا تابع درجه حرارت محیطنیز می باشد.

۳.**خطای بهره** :از ADC انتظار می رود که بهره واحد داشته باشد ولی در عمل ممکن است با بهره دیگری مواجه شویم که خطا در خروجی را تولید کند به این معنی که به جای $Vq=Vi\pm\delta/2$ با $Vq=kVi\pm\delta/$ مواجه شدیم.

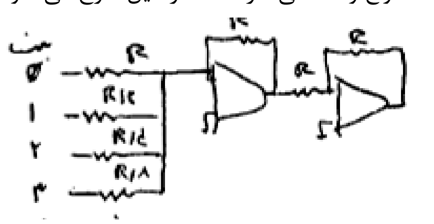


۴.**خطای عدم خطی بودن** :این خطا به آن معنی است که δ(ارزش LSB) در تمام محدوده ورودی ثابت نیست به این ترتیب بین خروجی ایده آل و خروجی واقعی اختلاف ایجاد گردد. شکل این تفاوت ها را نشان می دهد . این اختلاف در بعضی از نقاط ممکن است به حدی برسد که بعضی از کدها هرگز در خروجی ظاهر نگردند.

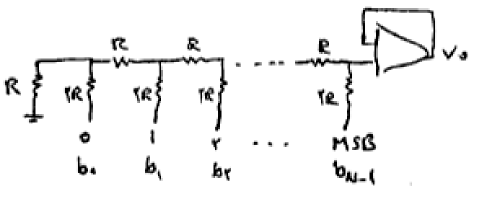


۳-۴-۴ مبدل دیجیتال به آنالوگ Digital to Analog Converter (DAC)

DAC سیگنال دیجیتال را به سیگنال کوانتیزه تبدیل می کند سیگنالی که از نظر زمانی پیوسته ولی دامنه آن گسسته است (پله ای) با عبور دادن سیگنال کوانتیزه از فیلتر LP مناسب خروجی هموار بدست می آید.DAC ها انواع و اقسامی دارند که در ذیل شرح می شوند.



۱.**DAC با مقاومتهای وزنی**: شکل ساختار مداری این DAC را نشان می دهد. در این طرح وقتی تعدادبیتهای ورودی N، زیاد باشد تنوع گسترده مقاومتهای مورد نیاز پدید می آید که طرح را نا مطلوب می سازد. از این طرح در طراحی IC ها استفاده می گردد.

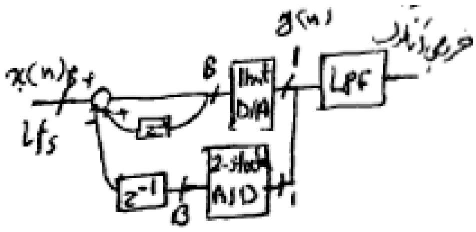


۲.**DACبا نردبان مقاومتی**در این طرح نوع مقاومتها به R و ۲R محدود می گردند، مستقل از اینکه N چه عددی باشد. خروجی این DAC برابر است با

$V_o=(b_0 2^{-N}+b_1 2^{-N+1} \ldots\ldots b_{N-1} 2^{-1})V_h$

که Vh ولتاژ مربوطه به حالت دیجیتالی ۱ است.

۳. DAC فرا نمونه گیر سیگمادلتا: *Oversampling Sigma Delta*



در این مبدل ابتدا فرکانس نمونه گیری سیگنال *x(n)* افزایش قابل ملاحظه یافته و سپس به *DAC* از نوع سیگمادلتا اعمال می گردد .خروجی بـه ۱بیـت *DAC* اعمال و سپس با فیلتر کردن آن سیگنال آنالوگ معـادل سـیگنال دیجیتـالی در خروجی ظاهر می گردد. در این روش سیگنال *x(n)* بـه مراتـب فرکـانس نمونـه گیری بالاتر از مقدار مورد نیاز دارد (نایکوئیست ریت). سـیگنال *y(n)* سـیگنالی دو حالته است که بین ماکزیم و می نیمم سیگنال *x(n)* سوئیچ می شود بلوک *ADC* مقدار *y(n)* را به سیگنال *B* بیت دیجیتـالی معـادل تبدیل می کند تا بتواند با *x(n)* که *B* بیت دارد مقایسه شود.

مشخصات *DAC* ها

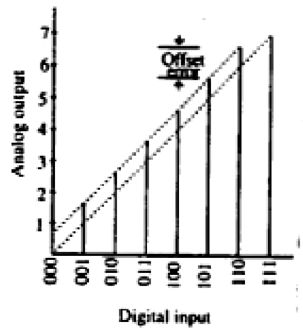
۱-تعداد بیتها معرف رزولوشن است.

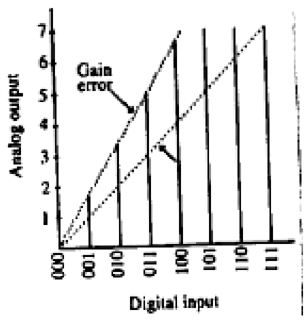
۲-در *DAC* بدلیل وجود المانهای فعال خطای *offset* وجود دارند.

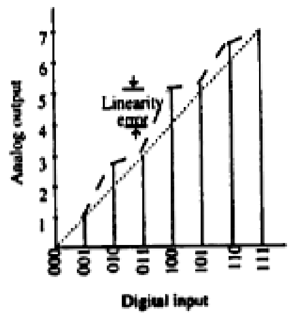
۳-خطای بهره :اگر بهره المان در عمل غیر از ۱ باشد.

۴- خطای عدم خطی بودن: به این معنی است که خروجی به ازای تغییر ۱ بیت در محدوده کار مقادیر تغییرات متفاوت دارد. است.

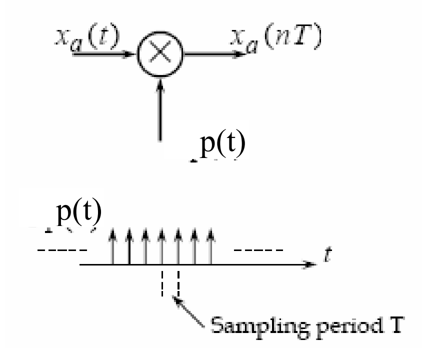
۵-زمان تبدیل *Convesion Time*: مدت زمان بین اعمال سیگنال و آماده بودن خروجی معتبر







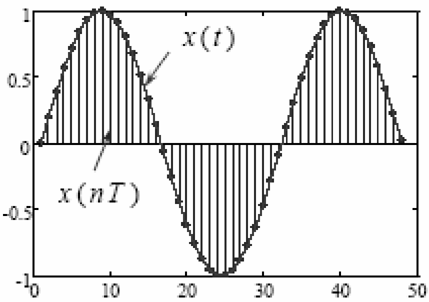
۳-۵ تئوری نمونه برداری



نمونه برداری از سیگنال را *S&H* انجام می دهد اگر پریود سوئیچ را *T* در نظر بگیریم و نمونه برداری با پالس باریکδ صورت گیرد آنوقت سیگنال خروجی برابر خواهد شد با

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

در این رابطه *xa(t)* سیگنال آنالوگ ورودی است که مقدار آن در زمان نمونه برداری *xa(nT)*است. *p(t)* مجموعه تابع ضربه است که کار نمونه برداری را انجام می دهد.



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nTs)$$

همچنانکه دیده می شود سیگنال *xp(t)* سیگنال گسسته ای است که از مجموعه تابع ضربه با دامنه هایی که *xa(nT)* تعیین می کند تشکیل شده است.

تبدیل فوریه سیگنال *xa(t)* برابر است با

$$x_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

سیگنال نمونه برادری *p(t)* سیگنالی پریودیک است که سری فوریه آن برابر است با

$$c_n = \frac{1}{Ts}\int_0^T \delta(t)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{Ts} \Rightarrow p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\Omega st} = \frac{1}{Ts}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega st}$$

از طرفی داریم

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) = x_a(t)\frac{1}{Ts}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t}$$

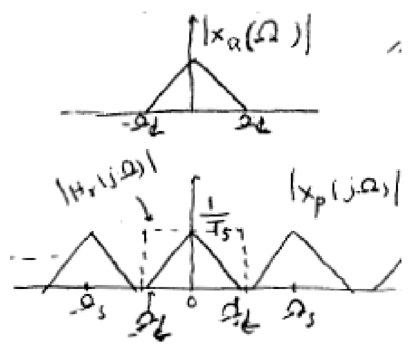
حال فوریه *xp(t)* برابر است با

$$X_p(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{Ts}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega_s t}e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{Ts}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-n\Omega_s)t}dt$$

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{Ts}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j(\Omega-n\Omega_s)t}dt = \frac{1}{Ts}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega-n\Omega s)$$

به این ترتیب فوریه سیگنال *xp(t)* همان فوریه سیگنال*xa(t)* است که در *1/Ts* ضرب شده ورودی محور فرکانس با پریود *Ωs* پریودیک شده است.

همپوشانی فرکانسی**aliasing**



اگر *Ωs* کمتر از دو برابر *Ωl* باشد فوریه *Xp(Ω)* شکل دیگری به خود می گیرد در این حالت طیف فرکانس *Xa(Ω)* که بصورت پریودیک در *Xp(Ω)* تکرار می شود لبه های آنها روی هم افتاده و همپوشانی فرکانسی *aliasing* یا *folding* اتفاق می افتد.

در حالت اول که *Ωs>2Ωl* بود با استفاده از فیلتر پائین گذر *H(Ω)* می توانستیم سیگنال*xa(t)* را بازسازی کنیم ولی وقتی *Ωs<2Ωl* است خروجی فیلتر پائین گذر طیفی است که با طیف *Xa(Ω)* تفاوت دارد. در این حال سیگنال*xa(t)* از سیگنال نمونه برداری شده قابل بازسازی نیست.

به فرکانس *Ωl* که حد بالای فرکانسی سیگنال آنالوگ است، فرکانس نایکوئیست گفته می شود*Ωn=Ωl*. به عدد ۲، عدد نایکوئیست می

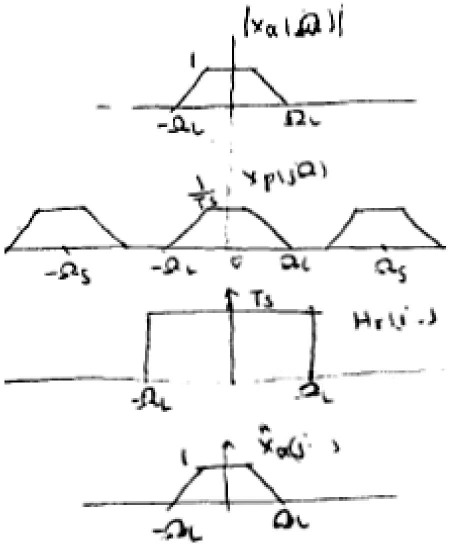
گویند. برای جلوگیری از همپوشانی فرکانسی، فرکانس نمونه برداری باید حداقل حاصلضرب عدد نایکوئیست در فرکانس نایکوئیست باشد *Ωs>=2Ωn*. *Ωs=2Ωn* نایکوئیست *rate* نام دارد. اگر *Ωs>>2Ωn* باشد به ،آن فرا نمونه برداری و اگر *Ω<2Ωn* باشد به ان فرو نمونه برداری می گویند.

۳-۵-۱ فیلتر ورودی و انتخاب پریود نمونه برداری:

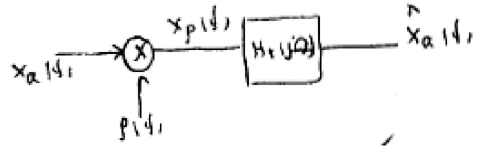
برای انتخاب پریود نمونه برداری باید اطلاعات اولیه در رابطه با طیف سیگنال را داشت و سپس بر اساس آن و فرکانس نمونه برداری نایکوئیست اقدام کرد. در سیگنال های تلفنی صوتی حد فرکانس ۴*KHZ* است که فرکانس نمونه برداری حدود ۸*KHZ* انتخاب می شود. حد فرکانس سیگنال ویدوئی۵*MHZ* است و در همین رابطه نیز فرکانس نمونه برداری باید انتخاب شود. سیگنال های موسیقی با کیفیت بالا حد فرکانس ۲۰*KHZ* دارند لذا فرکانس نمونه برداری *42KHZ* انتخاب می شود.

برای جلوگیری از وقوع همپوشانی فرکانسی که بازسازی سیگنال نمونه برداری شده را با مشکل مواجه می کند، در ورودی سیستم نمونه بردار و قبل از *S&H* فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی که فرکانس قطع آن *Ωc* به گونه ای انتخاب می شود که *Ωc<Ωs/2* باشد تعبیه می گردد. به این ترتیب اگر سیگنال، مولفه های ناخواسته ای داشته باشد که منجر به همپوشانی فرکانسی شود در ورودی حذف می گرد.

۳-۵-۲ بازسازی سیگنال:



برای بازسازی سیگنال اگر سیگنال گسسته *xp(t)* را از فیلتر پائین گذر *H(Ω)* عبور دهیم سیگنال بازسازی شده بدست می آید که مشخصه فرکانسی *xa(t)* را دارد و در شکل نشان داده شده است.



از *Hr(Ω)* عکس تبدیل فوریه می گرفته می شود.

$$h_r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_r(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=$$

$$\frac{Ts}{2\pi}\int_{-\omega_L}^{\omega_L}e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{Sin(\Omega_L t)}{\frac{2\pi}{Ts}\frac{t}{2}}\qquad(-\infty\le t\le\infty)$$

از طرفی

$$x_p(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)\delta(t-nTs)$$

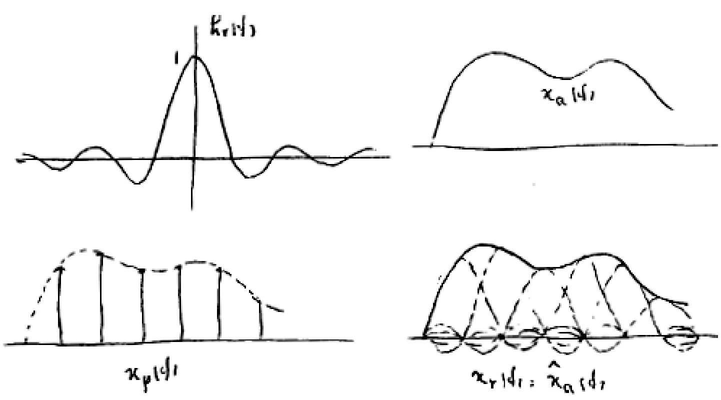
برای بدست آوردن $\hat{x}_a(t)$ دو سیگنال *hr(t)* و *xp(t)* باید کانوالو شوند.

$$\hat{x}_a(t)=\int\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)\delta(\tau-nT_s)h_r(t-\tau)d\tau=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)\int_{-\infty}\delta(\tau-nT_s)h_r(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)h_r(t-nT_s)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)\frac{\sin[\omega_L(t-nT_s)]}{\frac{2\pi}{T_s}\left(\frac{t-nT_s}{2}\right)}$$

فرض کنیم*Ωs=2Ωl* باشد آنگاه

$$\hat{y}_a(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)\frac{Sin\left[\frac{1}{2}\frac{2\pi}{Ts}(t-nTs)\right]}{\frac{2\pi}{Ts}\frac{(t-nTs)}{2}}=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)\frac{Sin\left[\frac{\pi(t-nTs)}{Ts}\right]}{\frac{\pi(t-nTs)}{Ts}}$$



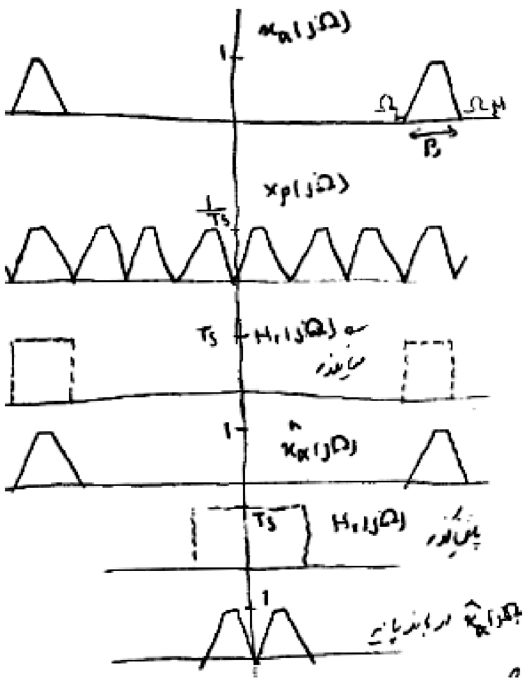
اگر به گونه دیگر به بازسازی *xa(t)* نگاه کنیم*hr(t)*

$$\frac{Sin\left[\pi(t-nTs)/Ts\right]}{n(t-nTs)/Ts}$$

میان یابی است که با میان یابی ایده آل، سیگنال*xa(t)* را از *xp(t)* که نمونه برداری *xa(t)* است بازسازی می کنند.

دقت کنید فیلتر پائین گذر ایده آل *Hr(Ω)* و فیلتر ورودی ضد همپوشانی فرکانسی ایده آل فیلترهای ناپایدار و غیر علی هستند و تابع تبدیل کسری ندارند، لذا قابل پیاده سازی نیستند. از این رو در عمل بجای فیلتر پائین گذر ایده آل از فیلتر پائین گذر پایدار قابل ساخت استفاده می گردد که مشکلات مربوط به خود را بهمراه دارد.

نمونه برداری از سیگنال میان گذر



در سیگنال میان گذر فرکانس نمونه برداری براساس دو برابر پهنای باند سیگنال و نه دو برابر فرکانس حد صورت می گیرد.

$$\Omega s = 2B = \frac{2\Omega h}{M}, \qquad M \quad integer$$

مستقل از اینکه فرکانس نمونه برداری چه مقدار باشد می توان نوشت

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{Ts}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega s)$$

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{Ts}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - 2nB)$$

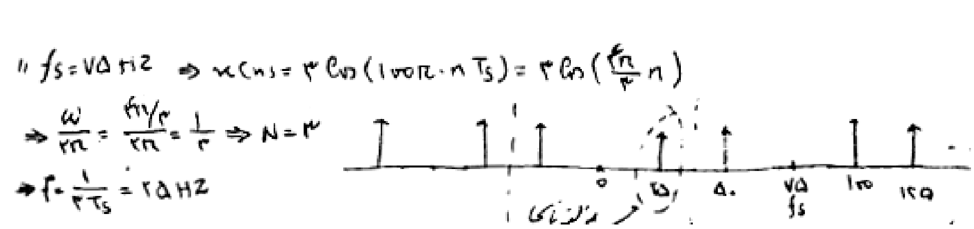
شکل چگونگی طیف سیگنال ها و بازسازی مربوطه را نشان می دهد اگر *M* عدد صحیح بدست آید پهنای باند را

$$B' = \frac{\Omega h}{integer(\frac{\Omega h}{B})}$$

و *Ωs=2B'*در نظر گرفته می شود. اگر سیگنال از فیلتر میان گذر عبور داده شود. سیگنال اولیه بازسازی می شود. اگر از فیلتر پائین گذر استفاده شود مشابه سیگنال در باند پایه بدست می آید.

مثال:از سیگنال *xa(t)=3Cos(100πt)* در ۳ فرکانس ۲۰۰،۱۰۰،۷۵ هرتز نمونه گیری شده است امکان بازسازی سیگنال را بررسی کنید.

جواب:



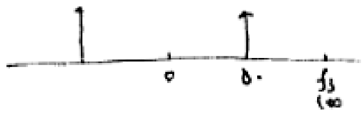
سیگنال نمونه گیری شده مولفه نابجای ۲۵ هرتزی به جای مولفه ۵۰ هرتزی اصلی پیدا می کنند.

۲/

$f_s=100Hz \Rightarrow x(n)=2\cos(100\pi n T_s)=2\cos(n\pi)$

$\Rightarrow \frac{w}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}\Rightarrow N=2$

$\Rightarrow f=\frac{1}{2T_s}=50Hz$

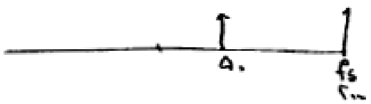


سیگنال نمونه گیری شده دارای مولفه ۵۰ هرتزی مشابه سیگنال آنالوگ ولی با دامنه ۲ برابر است.

c) $f_s=200Hz \Rightarrow x(n)=2\cos(100\pi n T_s)=2\cos(n\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \frac{w}{2\pi}=\frac{\pi}{2\times 2\pi}=\frac{1}{4}\Rightarrow N=4$

$\Rightarrow f=\frac{1}{4T_s}=50Hz$



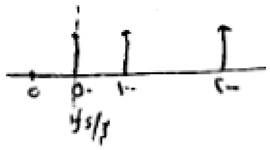
سیگنال مونه گیری شده دارای مولفه ۵۰ هرتزی مشابه سیگنال آنالوگ است که قابل بازسازی است.

مثال: فرکانس نایکوئیست و نایکوئیست ریت سیگنال *x(n)=3Cos 50πt+10Cos300πt* را تعیین کند.

برای سیگنال اول *F1=25Hz* و برای سیگنال دوم *F2=150Hz* است پس *Fn=150Hz* است و نایکوئیست ریت برابر *2Fn=300Hz* و فرکانس نمونه گیری *Fs>2Fn=300Hz* باید باشد.

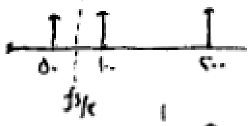
مثال: اگر از سیگنال *x(t)=cos400πt+cos100πt+cos200πt* با فرکانس های ۱۰۰،۱۵۰،۳۲۵،۴۰۰ و ۶۰۰ هرتز نمونه گیری شود. چه مولفه های فرکانسی قابل بازسازی هستند. آیا این مولفه ها همان مولفه های سیگنال اصلی هستند.

$f_s=100$



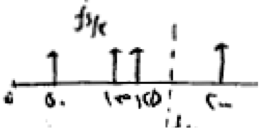
۱)هیچ مولفه ای قابل محاسبه نیست.

$f_s=150$



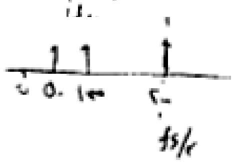
۲)فقط مولفه های ۵۰ هرتزی با ۳ برابر توان قابل بازسازی است.

$f_s=325$



۳) مولفه ۵۰، ۱۰۰ و ۱۲۵ از بازسازی بدست می آیند که با مولفه های سیگنال اصلی متفاوت هستند.

$f_s=400Hz$



۴)تنها مولفه های ۵۰ و صد هرتزی قابل محاسبه هستند و سیگنال اصلی را نمی توان بازیافت.

$f_s=401Hz$

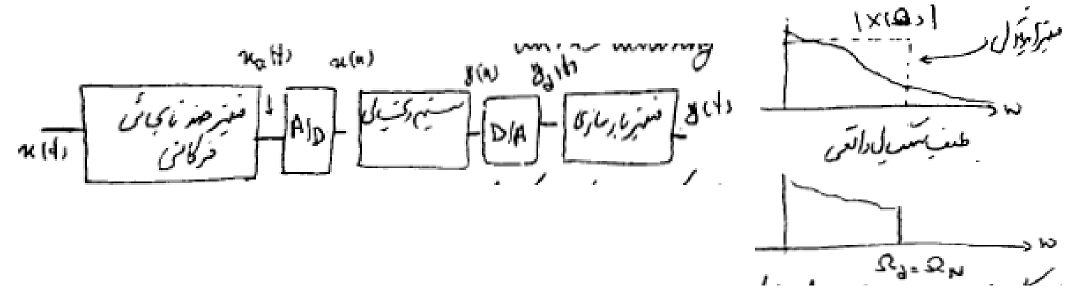
۵)سیگنال اصلی با مولفه های ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ هرتزی را می توان با فیلتر پائین گذر ایده آل بازسازی نمود این فرکانس نمونه گیری برابر است با *Fs=2Fn+ε=400+ε*

۳-۶ بررسی عملکرد عوامل نمونه گیری و بازیابی سیگنال

۳-۶-۱ فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی *anti-aliasing filter*

عملا پهنای باند سیگنال بصورات برشی محدود نیست که بتوان فرکانس نایکوئیست را برای جلوگیری از نا بجائی فرکانس مشخص کرد راه حلی که به نظر می رسد در مرحله اول ممکن است استفاده از فیلتر پائین گذر ایده آل باشد که طیف سیگنال در فرکانس دلخواه *Ωd* را به صورت برشی محدود کند تا فرکانس نایکوئیست *Ωn=Ωd* بدست آید.

فیلتر ایده آل، قابل ساخت نیست لذا باید با فیلتری قابل ساخت جایگزین گردد. این جایگزینی به همراه خود تبعاتی را به دنبال دارد. یک فیلتر واقعی را با *Rp*(ریپل باند گذر)،*Rs*(تضعیف باند حذف) *Ωp* لبه باند گذر و *Ωs* لبه باند حذف می توان معرفی کرد. تبعات استفاده



از فیلتر واقعی که به صورت خطا در عملکرد سیستم ظاهر می شوند از این قرار هستند:

۱. بهره باند گذر به مقدار ثابت یک نسبت و برای فرکانس های مختلف تا حد مقدار *Rp* می تواند متغیر باشد.

۲. فرکانس های باند حذف به کلی از بین نمی روند بنابراین اثر ضد همپوشانی فرکانسی به طور کلی از بین رفتنی نیست ولی آن را می توان به مقدار کافی تضعیف کرد.

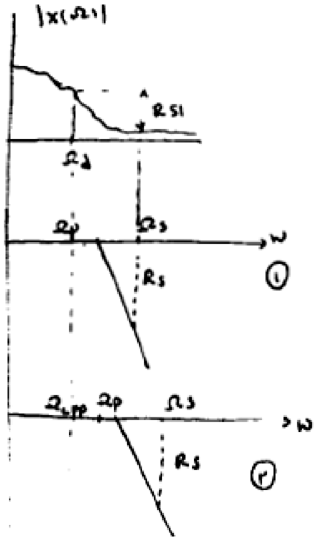
۳. فیلترهای واقعی مانند فیلتر ایده آل صفر فاز *zero phase* نیستند، نوع خطی فاز آنها تاخیری به سیگنال تحمیل میکند و نوع با فاز غیر خطی، فاز سیگنال ورودی را معوج می نماید. محدود تقریبی خطی فاز فیلترهای شناخته شده از این قرار است.

بسل	الیپتیک	باترورث-چبی چف	باترورث درجه ۲	باترورث درجه۱
Ωp	$0.5\Omega p$	$0.75\Omega p$	$0.85\Omega p$	Ωp

۴. کاهش مقدار *Rp* و افزایش*Rs* به منظور کاهش خطا ناشی از فیلتر واقعی منجر به افزایش درجه فیلتر آنالوگ می گردد که پیچیدگی طرح را افزایش می دهد.

فیلتر باترورث برای این منظور فیلتر مناسبی است ولی **اگر از الپیتیک یا چپی شف ۲که دارای صفر هستند استفاده شود باید مراقب بود که دارای صفری در بینهایت نباشد(درجه صورت بیشتر از مخرج باشد)**. در غیر اینصورت دامنه فیلتر در فرکانسهای بالا ثابت و افت شیبی نداشته و نویز فرکانس بالا می تواند مشکل ایجاد کند..

در کاربردهای مخابراتی از فیلتر الپیتیک$\Omega p=3.6kHz$ و $\Omega s=4kHz$ با درجه ۳ استفاده می شود و فرکانس نمونه گیری *KHZ* ۸ است.



۵. براساس مباحث فوق و ضرورت یا عدم ضرورت خطی بودن فاز فیلتر، مطابق شکلهای مقابل می توان اقدام به طرح فیلتر کرد. در فیلتر نمودار ۱ لبه باندگذر $\Omega p=\Omega d$ قرار گرفته است و در Ωs تضعیف *Rs* به سیگنال اعمال می شود. در این طراحی فاز سیگنال در معرض اعوجاج قراردارد که بستگی به نوع فیلتر مقدار آن متفاوت خواهد بود.

در نمودار ۲مقدار Ωd برابر Ωlpp(محدوده فرکانسی که فاز فیلتر خطی است) قرارگرفته است به این ترتیب سیگنالهای باندگذر بدون اعوجاج فاز و فقط با یک تاخیر در خروجی فیلتر ظاهر می شوند.

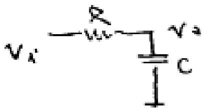
۶- فرکانس نمونه گیری: حداقل ممکن فرکانس نمونه گیری در حالت ایده آل $\Omega s=2\Omega d$ است که آن را به عنوان معیار می توان در نظر گرفت. اما از آنجا که باید فیلتر واقعی استفاده کرد و آن هم دارای باند انتقالی (Ωp-$\Omega stop$) است، فرکانس نمونه برداری به $\Omega s=2\Omega stop$ افزایش می یابد. اگر موضوع بی اهمیت بودن مولفه های ناخواسته در باند انتقالی در نظر گرفته شود، میتوان از $\Omega s=\Omega d+\Omega stop$ نیز استفاده کرد. (بررسی کنید)

b)اگر خطای طیف سیگنال خود دارای افت باشد می توان آنرا در *Rs* لحاظ کرد تا درجه فیلتر کاهش یابد. دقت شود که مقدار تضعیف باید نسبت به کوچکترین مولفه باند گذر در نظر گرفته شود

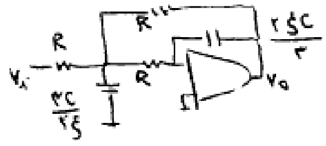
۷-تلاش برای رسیدن به حداقل فرکانس نمونه گیری موجب می شود درجه فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی در یک طرف و درجهفیلتر میان یاب از طرف دیگر بالا رود که به پیچیدگی مدار می انجامد که به هیچ وجه مطلوب نیست.برای حل مشکل روش مناسب آن است که

درجه فیلتر آنالوگ پائین نگاه داشته شود و نمونه برداری با فرکانس بالاتری صورت گیرد .سیگنال نمونه برداری شده سپس از فیلتر /دیجیتالی که می توان درجه بالائی داشته باشد عبور داده شده و آنگاه فرکانس نمونه گیری به مقدار حداقل خود کاهش داده می شود. نحوه انجام این راهکار مناسب در فصل ۸ توضیح داده می شود.

۸- برای ساخت فیلتر آنالوگ از سری سازی فیلترهای درجه ۱و ۲ به مقدار کافی استفاده میشود.



$$H(s)=\frac{\Omega_c}{s+\Omega_c}\qquad \Omega_c=\frac{1}{RC}$$



$$\frac{\Omega_c^2}{s^2+2\zeta\Omega_c s+\Omega_c^2}\qquad \Omega_c=\frac{1}{RC}$$

اگر درجه فیلتر بدست آمده بالا باشد ان را باید به درجات ۱ و ۲ تجزیه و سپس از مدار ات نمونه فوق برای ساخت آن استفاده کرد.

مثال:فرض کنید طیف سیگنال بعد از فرکانس *Ωd* برابر *db*۲۰- افت داشته باشد (سیگنال ناشی از سیستم درجه۱ باشد)مشخصات فیلتر باترورث ضد همپوشانی فرکانسی را تعیین کنید که ۱) اعوجاج باز اهمیت نداشته باشد ۲)فاز خطی باشد. برای این مثال ۱٪ خطا مجاز است و فرکانس نمونه گیری *5Ωd* و *Rp=1db* مطلوب است

حل: ۱)فرکانس نمونه گیری اگر *5Ωd* منظور شود. بنابراین در *Ωstop=4Ωd* مقدار تضعیف سیگنال برای رسیدن به ۱٪ خطا می یابد به *db*۴۰ برسد. تضعیف خود سیگنال *db*۱۲ است که *db*۲۸ بقیه را باید فیلتر تامین کند. درجه فیلتری که *Ωp=Ωd* ، *Rp=1db,Ωstop=4Ωd, Rs=28db*، باشد برابر است با

$$N=\frac{\log\left[\sqrt{A^2-1}/\varepsilon\right]}{\log\frac{\Omega_s}{\Omega_p}}=\frac{\log\left[\sqrt{25.11^2-1}/0.5\right]}{\log 4}=2.82\simeq 3$$

$$A=10^{RS/20}=10^{28/20}=25.11$$

$$1+\varepsilon^2=10^{Rp/10}=10^{1/10}\Rightarrow\varepsilon=0.5$$

۲)اگر فاز خطی مورد نیاز باشد

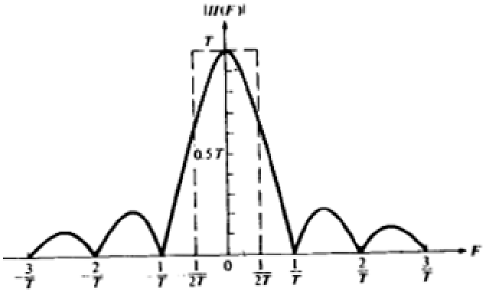
$$\Omega_{Lpp}=\Omega_d\simeq 0.75\,\Omega_p$$

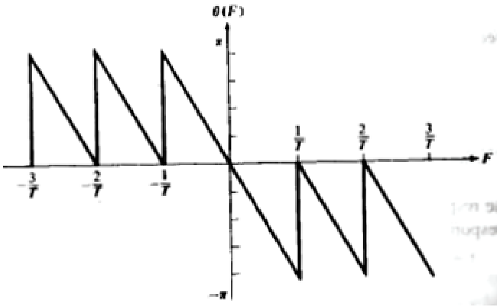
$$\Omega_s=4\Omega_d=3\Omega_p\qquad\Rightarrow N=\frac{\log\left[\sqrt{A^2-1}/\varepsilon\right]}{\log\frac{\Omega_s}{\Omega_p}}=\frac{1.7}{\log 3}=3.57$$

۳-۶-۲ فیلتر خروجی (فیلتر میان یابی)

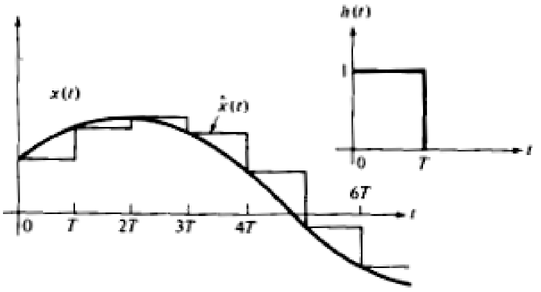
دیدیم که برای بازسازی سیگنال نمونه برداری شده می توان از فیلتر پائین گذر ایده آل استفاده کرد متاسفانه فیلتر مذکور قابل ساخت نیست لذا باید روش قابل استفاده ای پیدا کرد. به دنبال نمونه های از این فیلترها ارائه می شوند.

۱) ***ZOH***: *Zero Order Hold*





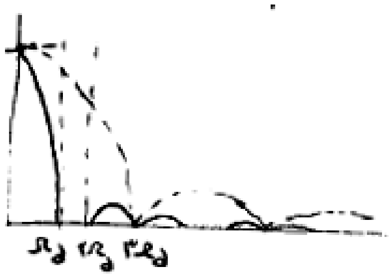
عمومی ترین فیلتری که مورد استفاده قرار می گیرد به شمار می آید. شکل نحوه ی عمل، پاسخ ضربه و دامنه و فاز پاسخ فرکانسی آن را نشان می دهد.



پاسخ فرکانسی این سیستم

$$H(F) = T(\frac{\sin \pi FT}{\pi FT})e^{-j\pi FT}$$

است دامنه نشان می دهد که مشخصه ای مانند فیلتر پائین گذر داشته و فاز آن خطی است. دامنه ی آن در فرکانس *1/(2T)* به *0.7T* می رسد که برابر ۳*db* افت است.



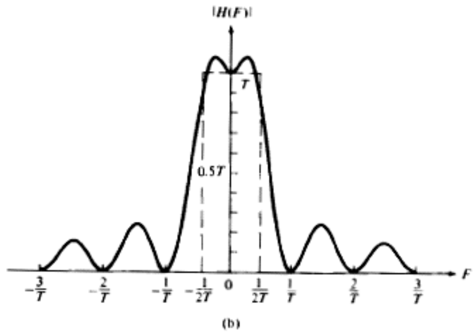
وقتی سیگنالی دیجیتالی به*ZOH* اعمال می شود سیگنالی خروجی *yd(t)* سیگنالی پله پله بدست می آید این مسئله را طیف فرکانسی سیگنال خروجی نیز نشان می دهد. فرض کنید سیگنالی با فرکانس *3Ωd* نمونه برداری شده و حالا به*ZOH* اعمال می گردد. شکل طیف سیگنال خروجی را نشان می دهد. طیف سیگنال خروجی با خط پر و طیف *ZOH* با نقطه چین نشان داده شده است .همچنانکه دیده میشود سیگنال خروجی علاوه بر برآمدگی اصلی (طیف سیگنال اصلی) مولفه های تضعیف شده ای را نیز بهمراه دارد. این مولفه ها باعث ایجاد شکل پله پله گردیده اند برای هموار کردن خروجی می باید از فیلتر کمکی استفاده کرد که مولفه ای ناخواسته را حذف کند. فیلتر مذکور باید *Ωp=Ωd*(برای فاز خطی *Ωlpp=Ωd*) و *Ωstop=Ωs-Ωd* داشته باشد که *Ωs* فرکانس نمونه برداری است در شکل فوق*Ωstop=2Ωd* است. مقدار *Rp* و *Rs* فیلتر را باید با توجه به کاربرد و دقت در استخراج خروجی تعیین کرد.

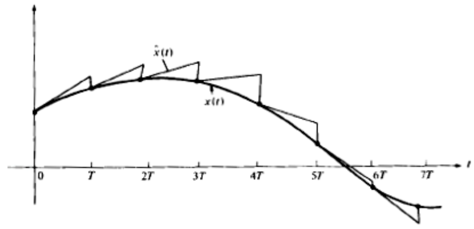
۲-*FOH*: ***First Order Hold***

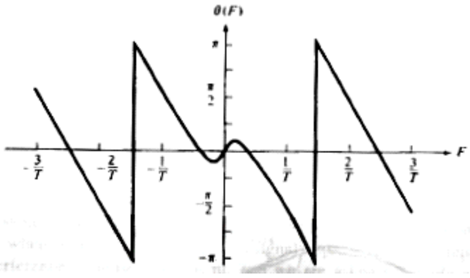
FOH برای بازسازی سیگنال از رابطه

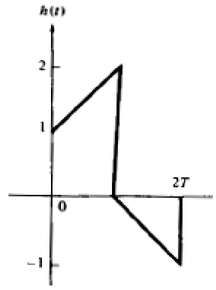
$$y(t) = y(nT) + \frac{y(nT) - y(nT-T)}{T}(t - nT) \qquad nT \le t \le (n+1)T$$

استفاده می کند شکلها نحوه عملکرد ، پاسخ ضربه ،دامنه و فاز پاسخ فرکانسی آن را نشان می دهند. همچنانکه دیده می شود *FOH* نیز مانند فیلتری پائین گذر است و می توان دریافت که ناپیوستگی در خروجی آن ناشی از برآمدگیهای کناری است که مولفه های فرکانس بالا را عبور می دهد. فاز این سیستم در ناحیه *|F|<1/(2T)* رفتاری غیر خطی از خود نشان می دهد. پاسخ فرکانس این سیستم برابر است با









$$H(F) = T(1 + 4\pi F^2T^2)^{1/2}\left(\frac{\sin \pi FT}{\pi FT}\right)^2 e^{j\Theta(F)} \qquad \Theta(F) = -\pi FT + \tan^{-1} 2\pi FT$$

برای حذف ناپیوستگی در خروجی و هموار کردن آن می باید از فیلتر کمکی نظیر آنچه برای *ZOH* بیان شد استفاده شود .

۳-میان یاب خطی با تاخیر:

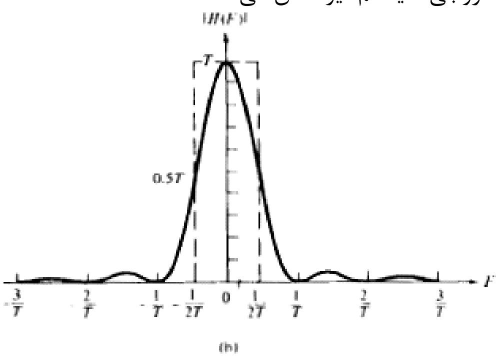
فرمول این سیستم

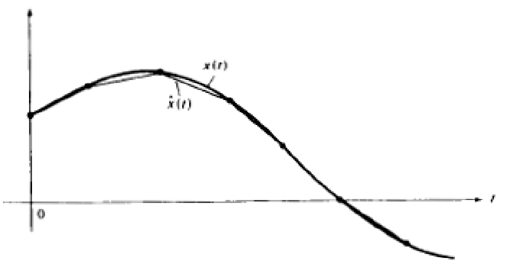
$$y(t) = y(nT-T) + \frac{y(nT)-y(nT-T)}{T}(t-nT) \qquad nT \le t \le (n+1)T$$

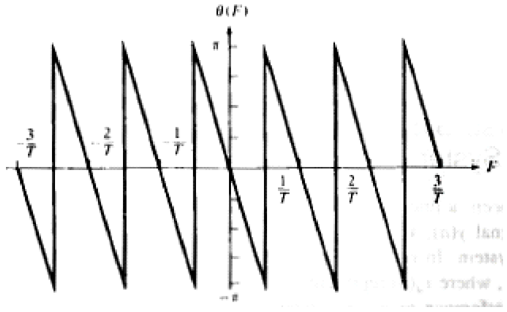
است. شکلها عملکرد ، پاسخ ضربه، دامنه و فاز طیف آن را نشان می دهند. پاسخ فرکانسی این سیستم از رابطه

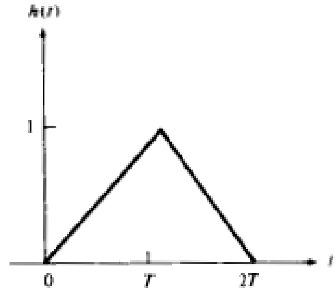
$$H(F) = T(\frac{Sin\pi FT}{\pi FT})^2 e^{-j2\pi FT}$$

بدست می آید. همچنانکه دیده می شود این سیستم نیز رفتاری پائین گذر دارد ولی به دلیل کوچک بودن سطح زیر گذر برآمدگیهای کناری انرژی مولفه های فرکانسی بالا کم گشته و این موضوع را شکل خروجی سیستم نیز نشان می دهد.









۴-اعوجاج دامنه و افزایش فرکانس نمونه گیری :

با دقت در فرکانس ۳ میان یاب طرح شده میتوان یافت که برای محدود کردن ریپل باند گذر به $1db$ فرکانس نمونه گیری که مطابق جدول زیر می باشد نیاز است علاوه بر این وقتی ریپل باند گذر فیلتر مکمل را به آن اضافه کنیم نیاز به فرکانس نمونه گیری بالاتر پدید می آید.

$ZOH: \Omega s=4\Omega d$, فاز: خطی

$FOH:\Omega s=2\Omega d$, فاز:غیر خطی

Linear interpolation:$\Omega s=6\Omega d$ فاز: خطی

برای رفع این مشکل راه حلی که وجود دارد این است که پردازش سیگنال دیجیتالی با حداقل فرکانس نمونه گیری ممکن انجام شود و در هنگام تبدیل سیگنال دیجیتالی به آنالوگ ابتدا فرا نمونه گیری شده و سپس به ZOH که ساده ترین سیستم است اعمال گرد در این وضعیت ناپیوستگی های خروجی به سهولت با فیلتری درجه پائین قابل هموار شدن است.

مثال :اگر فرکانس نمونه گیری از مقدار حداقل $2\Omega d$ به $10\Omega d$ افزایش باید پهنای باند انتقالی فیلتر مکمل به چه مقدار خواهد رسید.

الف) $\Omega s=2\Omega d$: در این حالت پهنای باند انتقالی برای فیلتر مکملبرابر صفر است و برای فیلتر کردن از فیلتر ایده آل باید استفاده شود که قابل ساخت نیست.

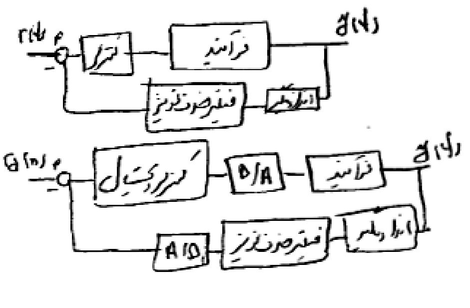
ب)$\Omega s=10\Omega d$: در این حالت پهنای باند انتقالی $\Omega s-2\Omega d=8\Omega d$ است و نسبت لبه باند حذف به باند گذر 9 است. یک فیلتر درجه ۱ با این باند انتقالی مولفه های فرکانس بالا را حداقل $۲۰db$ تضعیف می کند که هموار شدن قابل قبول سیگنال خروجی را به دنبال دارد.

۵-خلاصه مطالب: اگر چه در این بند FOH و میان یاب خطی با تاخیرمورد بحث قرار گرفت ولی عموما از ZOH و فیلتر میان یاب آنالوگ استفاده می شود. به نحوی که سیگنال دیجیتالی با به ZOH و سپس به فیلتر میان یاب آنالوگ اعمال می گردد. هر چقدر Ωsبه $2\Omega d$ (kایکوئیست ریت) نزدیکتر گردد درجه فیلتر میان یاب افزایش می یابد و پیچیدگی ان بیشتر می شود به نحوی که به ازای $\Omega s=2\Omega d$ فیلتر پائین گذر ایده آل که قابل ساخت نیست مورد نیاز می گردد. نکته دیگر اینکه اگر $\Omega s<4\Omega d$ شود اعوجاج دامنه سیگنال تحت تاثیر دامنه طیف ZOH بیشتر از $1db$ می گردد. از آنجائیکه طرح فیلتر میان یاب آنالوگ با درجات بالا مشکل و دارای پیچیدگی است طرح جایگزین شکل را می توان مورد استفاده قرار داد که فیلتر میان یاب در قسمت دیجیتالی قرار میگیرد و طرح آن به نهایت ساده تر می شود در این طرح ابتدا فرکانس نمونه گیری افزلیش داده شده و از فیلتر میان یاب دیجیتالی عبور داده می شود و در نهایت به ZOH اعمال می گردد . فیلتر LP اختیاری است که ممکن است اصلا ضرورتی پیدا نکند.

۳-۶-۳ فرکانس نمونه گیری در سیستم حلقه بسته

شکل، سیستم کنترل آنالوگ و مشابه دیجیتالی آن را نشان می دهد در هر دو طرح فرآیند بطور طبیعی آنالوگ هستند.

a)در سیستم کنترلT حذف نویز هم در طرح آنالوگ و هم دیجیتالی به یک اندازه اهمیت دارند و این فیلتر در صورت ضرورتT کار فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی را نیز انجام می دهد. مشخصات این فیلتر باید مانند فرآیند وکنترلر در طراحی کنترلر منظور شود.



b)از آنجائیکه فرآیند پشت سر *DAC* قرار میگیرد و خود فیلتری پائین گذر است نیازی به فیلتر مکمل میان یاب نیز نیست.

c)معیاری که در تعیین فرکانس نمونه گیری این سیستمها ارائه می شود و در اکثر موارد خوب جواب می دهد براساس t_r (زمان نمو) یا Ωc(محل تقاطع نمودار بد حلقه باز با خط ۰*db*) بیان می گردد به این ترتیب که

$\Omega s=(30\text{-}10)\Omega c,$ یا $Fs=(4\text{-}10)/t_r$

می تواند انتخاب گردد. گفته می شود اگر سیستم رفتار غیر خطی داشته باشد ضرورت تعبیه فیلتر میان یاب بعد از *DAC* و در نظر گرفتن صفرها قطبهای آن در طراحی کمتر ضرورت پیدا می کند.

سوالات خودآزمایی

۱-کدامیک از سیگنال های زیر ، سیگنال های محدود ، توان ، انرژی هستند توان یا انرژی مربوطه را بدست آورید.

a) $n u(n)$ b) $\cos(n\frac{\pi}{4})$ c) $2^n u(n)$ d) $\{\underline{10},5,4,9,10\}$ e) $1/5^n u(n)$

a)نامحدود ، غیر توان، غیر انرژی،∞ b)محدود، غیر انرژی ، توانی(۰،۵)

c)نامحدود،غیر انرژی ، غیر توانی d)محدود ،انرژی(۳۲۲) ،غیر توانی (۰) e)محدود، انرژی(۰،۷۵)، غیر توانی(۰) ۲

۲) دنباله $x(n)=\{3,-2,5,\underline{1},4,5,2\}$ و $w(n)=\{-5,4,3,\underline{2},-6,9,1\}$ برای $-3\le n\le 3$ در نظر گرفته شده اند.

a) $x(n)+w(n)$ b) $x(n)w(n)$ c) $x_e(n)$ d) $x_o(n)$ e) $x(n)*w(n)$ را بدست آورید.

[a) $\{-2,2,8,\underline{3},-2,14,3\}$ ، b) $\{-15,-8,15,\underline{2},-24,45,2\}$ ، c) $\frac{1}{2}\{5,3,9,\underline{2},9,3,5\}$

d) $\frac{1}{2}\{1,-7,1,\underline{0},-1,7,-1\}$ ، e) $\{-15,22,1,\underline{7},-43,40,31,40,17,-12,-2,5,2\}$]

۳- اگر $y(n)$ مزدوج متقارن و $h(n)$ مزدوج معکوس باشد حاصلضرب این دو چگونه است .

(مزدوج متقارن معکوس)

۴- انرژی و دنباله های مزدوج متقارن و مزدوج متقارن معکوس دنباله های ذیل را بدست آورید.

a) $H(n)=\{\underline{-2+j5},4-j3,5+j6,3+j,-7+j2\}$ b) $H(n)=A\alpha^n$ ، α,A هر دو مختلط

[a) $H_{cs}=\frac{1}{2}\{-4,-3-j5,8+j5,8-j5,-3+j5\}$ ، $H_{ca}=\frac{1}{2}\{j10,11-j1,2+j7,-2+j7,-11-j1\}$

انرژی ۱۷۸ b) $A=de^{j\beta}$ ، $\alpha=\gamma e^{j\varphi} \Leftarrow H_{\substack{cs+\\ca-}}=\frac{de^{jn\varphi}}{2}(\gamma^n e^{j\beta}\pm\gamma^{-n}e^{-j\beta})$ ، ∞

۵- اگر خود همبستگی سیگنال تصادقی غیر پریودیک ایستائی $r_{xx}(m)=\frac{9+11m^2+4m^4}{1+3m^2+2m^4}$ باشد واریانس و متوسط آن را بدست آورید.

[$m_x=\sqrt{7}$ ، $\sigma_x^2=2$]

۶- کدامیک از سیگنال های ذیل پریودیک هستند

a) $\cos n\frac{\pi}{2}$ ، b) $\cos\frac{n}{8}\cos n\frac{\pi}{8}$ c) $\cos(5n+\frac{\pi}{4})$ d) $\cos(5t+\frac{\pi}{4})$ e) $e^{jn\frac{\pi}{8}}$

[a) پریودیک $N=4$ b) غیرپریودیک c) غیرپریودیک d) پریودیک $T=\frac{5}{2\pi}$ e) پریودیک $N=16$]

۷- نمونه گیری از سیگنال $A\cos(n\omega+p)$ به نتایج $\{1.4,1.4,-1.4,-1.4\}$ انجامیده است پارامترهای سیگنال را تعیین می کند با این نمونه ها چند سیگنال می توان ساخت.

[$\omega_0=\frac{\pi}{2}$ ، $p=-\frac{\pi}{4}$ ، $A=2$. بی‌نهایت سیگنال است $2\cos(n(\frac{\pi}{2}+2k\pi)-\frac{\pi}{4})$]

۸- برای پریود نمونه گیری شرطی بنویسید که سیگنال $Cos(\Omega0t)$ همچنان پریودیک باقی بماند.

$$\frac{\Omega 0}{\Omega s}=\frac{k}{N} : Period \rightarrow N$$

۹- با مراجعه به یک Data Book زمان تبدیل چند ADC و نوع آن را یادداشت کند.

[ct=7μs تقریب متوالی 8bit - ADC908 , ct=1.5μs half flash , 8bit . PHC820]

۱۰- برای کوانتیزه کردن سیگنال $6.35Cos(n\pi/3)$ با رزولوشن $\Delta=0.1$ به حداقل جند بت نیاز است. توان سیگنال سیگنال اصلی کوانتیزه و سیگنال به نویز $10log[Px/Pe]$ را بدست آورید.

[۷ ست ، $P_x=۲۰/۱۲$ ، $P_q=۲۰/۰۵$ ، $P_e=۰.۰۰۷۵$ ، $\frac{S}{N}=۳۴,۳۵\,db$]

۱۱-برای سیگنالی که تا ۱۰ کیلو هرتز مولفه دارد a)فرکانس نایکوئیست چند است b)حداقل فرکانس نمونه گیری و نایکوئیست ریت را تعیین کنید.c)اگر فرکانس نمونه گیری ۸ کیلو هرتز در نظر گرفته شود کدام بخش از طیف خراب می شود. مولفه ۵ و ۷ کیلو هرتزی چگونه تغییر می کنند.

[a) $f_n=10\,kHz$ b) $N.R=20\,kHz$ و اگر $|H(f)|_{f=f_n}=0$ باشد $f_s=20\,kHz$ در غیر اینصورت $20\,kHz+\epsilon$

c) تمام طیف خراب می شود ، به مولفه ۵ کیلو هرتزی مولفه ۳ کیلو هرتزی و به ۷ کیلو هرتزی مولفه ۱ و ۹ کیلو هرتزی اضافه می شوند]

۱۲-فرض کند سیگنال $x(t)=cos(2\pi*10t)+cos(2\pi*200t)+=cos(2\pi*800t)+$ در اختیار باشد.a) اگر فرکانس نمونه گیری ۱۶۱۰ باشد به فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی نیاز هست b)اگر مولفه های زیر ۲۰۰ هرتز اهمیت داشته و قرار است Fs حداقل فاز و فاز خطی بماند و 0.01 نابجائی فرکانسی(۴۰db) مجاز و اعوجاج ۱db قابل قبول باشد مشخصات فیلتر الیپتیک چگونه خواهد بود d)اگر از فیلتر درجه یک قرار باشد استفاده شود و مشخصات مطلوب مانند بند b باشد فرکانس نمونه گیری چقدر باید در نظر گرفته شود

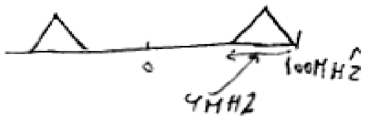
[a) خیر b) $f_p=400\,Hz$ ، $R_p=1\,db$ ، $R_s=40\,db$ ، $f_s=800\,Hz$ و فرکانس نمونه برداری $400+\epsilon$

c) فیلتر هموار نمی تواند باعث کاهش فرکانس نمونه برداری شود زیرا ضرورت نداشته و فرکانس نمونه برداری $1600+\epsilon$ باید باشد]

۱۳-طیف سیگنالی در شکل داده شده است سیگنال حقیقی یا کمپلکس است حداقل فرکانس نمونه گیری چه مقداری می تواند باشد.

[کمپلکس ، $\Omega_s=B$]

۱۴- حداقل فرکانس نمونه گیری برای سیگنالی که طیف آن در شکل آمده است چه قدر می تواند باشد.



(۱۲۵MHz]