۴

سیستم گسسته

۱-۴ دسته بندی سیستمها

۱- سیستم آنالوگ و گسسته

سیستم آنالوگ :در سیستم آنالوگ ورودی و خروجی های و عملکرد سیستم روی آنها پیوسته است $y=f(x)$

سیستم گسسته : در سیستم گسسته ورودی سیستم، گسسته است و به تبع آن خروجی و عملکرد سیستم نیز گسسته می گردد.

سیستم گسسته را می توان به صورت $y(n)=f(x(n))$ نشان داد.

مثال :سیستم تاخیر دهنده $-\infty<n<\infty$ $y(n)=x(n-n_0)$

۲- سیستم استاتیک (بی حافظه) و دینامیک

استاتیکی :سیستمی است که فقط به ورودی n پاسخ می دهد.

$$y(n)=x^2(n) \qquad y(n)=nx(n)+bx^3(n)$$

دینامیکی: سیستم دینامیکی سیستمی است که به گذشته ورودی و خروجی نیز جواب می دهد.

دارای یک حافظه $y(n)=x(n)+3x(n-1n)$

بینهایت حافظه
$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)$$

$1+M1+M2$ حافظه
$$y(x)=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k_0-M1}^{M2} x(n-k)$$

۱۲ حافظه
$$y(n)=\sum_{k=1}^{10} a_k y(n-k)+\sum_{j=1}^{2} b_j x(n-j)$$

۳)سیستم خطی و غیر خطی

سیستم خطی سیستمی است که شرط $f[ax1+bx2]=af(x1)+bf(x2)$ در آن صدق کند.

$$y(n)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)=\sum_{n=0}^{\infty}(ax_1(n)+bx_2(n))=a\sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)+b\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)=a\,f(x1)+b\,f(x2)$$

سیستمی خطی و

$$y(n)=x(n)^2 \Rightarrow (a x_1(n)+b x_2(n))^2=a^2x_1^2(n)+b^2x_2^2(n)+2ab\,x_1(n)x_2(n)\neq a^2x_1^2(n)+b^2x_2^2(n)$$

لذا غیرخطی است.

۴)سیستم مستقل زمانی *Time(shift) invariant*

سیستم مستقل زمانی سیستمی است که در حال آرامش، با تاخیر در ورودی در خروجی هم به همان ترتیب تاخیر پیدا کند.

اگر $y(n)=f(x(n)) \Rightarrow$

آنگاه $y(n,k)=f(x(n-k)) \overset{\text{باید}}{=} y(n-k)$

مثال

$$y(n)=x(n)-x(n-1) \Rightarrow \begin{cases} y(n-k)=x(n-k)-x(n-1-k) \\ y(n,k)=f(x(n-k))=x(n-k)-x(n-1-k)=y(n-k) \end{cases}$$

پس سیستم مستقل زمانی است.

$$y(n)=x(Mn) \Rightarrow \begin{cases} y(n-k)=x(Mn-Mk) \\ y(n,k)=f(x(n-k))=x(Mn-k) \neq y(n-k) \end{cases}$$

وابسته به زمان است

$$y(n)=nx(n) \Rightarrow \begin{cases} y(n-k)=(n-k)x(n-k) \\ y(n,k)=f(x(n-k))=nx(n-k) \neq y(n-k) \end{cases}$$. وابسته به زمان است

۵)سیستم علی *causal*

سیستمی است که به ازای هر$n=n_0$ سیستم فقط به ورودیهای $x(n)$ برای $n<=0$ وابسته باشد. به عبارت دیگر این سیستم به آیند ورودی پاسخ نمی دهد.

مثال:سیستم تفاضلی رو به جلو $y(n)=x(n+1)-x(n)$ غیر علی است

ولی سیستم تفاضلی رو به عقب $y(n0=x(n)-x(n-1)$ علی است.

۶)سیستم پایدار و ناپایدار:

سیستم به عبارت *BIBO* (ورودی محدود - خروجی محدود)پایدار است اگر به ازای تمام ورودیهای محدود، خروجیهای محدود داشته باشد. ورودی $x(n)$ محدود است اگر بتوان نوشت $|x(n)|<=B_x<\infty$ برای تمام nها ، خروجی محدود$|y(n)|<M<\infty$ بدست آید.این شرط لازم و کافی است.

۷)سیستم غیر فعال *passive*:

سیستمی که به ازای هر دنباله انرژی با ورودی محدود ، دنباله خروجی، انرژی کمتری داشته باشد سیستم غیر فعال و اگر برابر باشد سیستم بدون تلفات *lossless* است.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|y(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 < \infty$$

۲-۴ سیستم خطی مستقل زمانی Linear Time Invariant (LTI)

برای این سیستم از ۳ نوع مدل ریاضی می توان استفاده کرد که رابطه خروجی - ورودی سیستم را مشخص می کند این ۳ مدل عبارتند از:

۱- معادلات تفاضلی ۲- تابع تبدیل Z ۳- معادلات فضای حالت

سیستم LTI را می توان با معادله دیفرانس با ضرایب ثابت نوشت.

$$y(n)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i y(n-i)+\sum_{j=0}^{\infty}b_j x(n-j)$$

پاسخ سیستم LTI را به ضربه را می توان اینگونه محاسبه کرد.

$$\delta(n) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow h(n) \qquad h(n)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i h(n-i)+\sum_{j=0}^{\infty}b_j\,\delta(n-j)$$

مثال: پاسخ ضربه سیستم $y(n)=0.6y(n-1)+x(n)$ را بدست آورید شرایط اولیه را صفر در نظر بگیرید.

$$h(n)=0.6\,h(n-1)+\delta(0)$$

n	0	1	2	...	n
h(n)	1	0.6	0.36	...	0.6^n

$$\Rightarrow h(n)=0.6^n$$

۲)پاسخ سیستم به ورودی اختیاری $x(n)$ را می توان به شرح ذیل محاسبه کرد

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\,\delta(n-k) \Rightarrow y(n)=f\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\,\delta(n-k)\right]$$

از آنجائیکه $h(n)=f[\delta(n)]$ و سیستم خطی است، از رابطه جمع اثرها بدست می آید.

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

به این رابطه ، جمع کانولو شن می گویند. و آنرا با علامت نشان می دهند. کانولوشن اپراتوری خطی جابجائی پذیر ، اتحاد پذیر و توزیع پذیر است.

$y(n)=x(n)\otimes h(n)$

$x(n)\otimes h(n)=h(n)\otimes x(n)$

$[x(n)\otimes h(n)]\otimes p(n)=x(n)\otimes[h(n)\otimes p(n)]$

$[x(n)+h(n)]\otimes p(n)=x(n)\otimes h(n)+h(n)\otimes p(n)]$

این رابطه مبنای کار فیلتر کردن سیستمها است. اگر M طول h و N طول x باشد طول y برابر $L+M-1$ می گردد.

مثال: پاسخ ضربه سیستم FIR ذیل و پاسخ آن به سیگنال $x(n)=\delta(n-3)+\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)$ را بدست آورید.

$y(n)=x(n+1)+2x(n)+x(n-1)-x(n-2)$

جواب:

$$x(n)=\delta(n)\Rightarrow h(n)=\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)-\delta(n-2)$$

پاسخ سیستم به $x(n)$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{L+M-1} x(k)h(n-k)$$

$x(k)$

$n=-1 \Rightarrow h(-1-k)$

$n=0 \Rightarrow h(-k)$

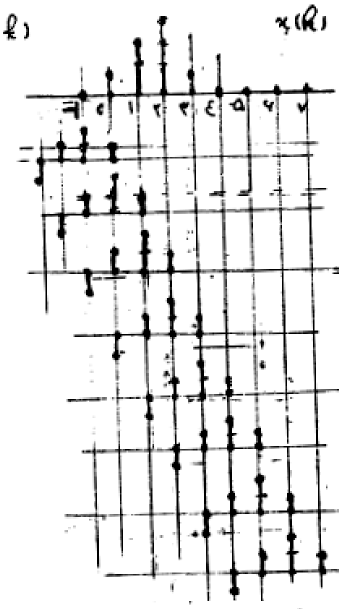
$n=1 \Rightarrow h(1-k)$

$n=2 \Rightarrow h(2-k)$

$n=3 \Rightarrow h(3-k)$

$n=4 \Rightarrow h(4-k)$

$n=5 \Rightarrow h(5-k)$



$y(-1)=1\times1=1$

$\Rightarrow y(n)=y(0)=2\times1+1\times2=4$

$y(1)=1\times3+2\times2+1\times3=8$

$y(2)=-1\times1+1\times2+2\times3+1\times1=8$

$y(3)=-1\times2+1\times3+2\times1=3$

$y(4)=-1\times3+1\times1=-2$

$y(5)=-1\times1=-1$

$y(6)=0$

$$\Rightarrow y(n)=\{4,8,8,3,-2,-1,0\}$$

۳)پاسخ پله سیستم را بدست آورید.

$$x(n)=u(n) \Rightarrow y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)u(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n} h(k) \Rightarrow \begin{cases} s(n)=s(n-1)+h(n) \\ h(n)=s(n)-s(n-1) \end{cases}$$

مثال: پاسخ پله مثال قبل را بدست آورید.

$n=-1 \Rightarrow s(-1)=h(-1)=1$

$n=0 \Rightarrow s(0)=s(-1)+h(0)=5$

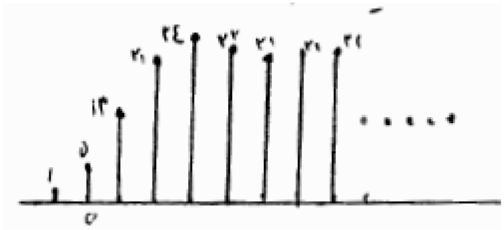
$s(1)=5+8=13$

$s(2)=13+8=21$

$s(3)=21+3=24$

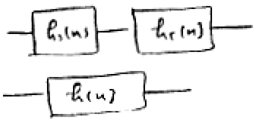
$s(4)=24-2=22$

$s(5)=22-1=21$



۴،۲،۱ خواص سیستم *LTI*

۱- *a*)اتصال سری: اگر دو سیستم با یکدیگر سری قرار گیرند تابع ضربه سیستم مجموع برابر کانولوشن تابع ضربه آندو است.



$\Rightarrow h(n)=h_1[n]*h_2[n]$

۱- *b*)اتصال موازی:

$\Rightarrow h[n]=h_1[n]+h_2[n]$

۲)شرط پایداری سیستم گسسته *LTI*

شرط پایداری *BIBO*سیستم این بود که به ازای هر ورودی محدود خروجی محدود تولید کند. به این ترتیب اگر $|x(n)|<=M<\infty$ باشد،

$|y(n)|<N<\infty$ گردد. حال می نویسیم

$$y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \Rightarrow |y[n]|=\left|\sum_{-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)\right|$$

$$\Rightarrow |y[n]| \le \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(k)||x(n-k)| \le M_x \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(k)|$$

به این ترتیب سیستمی پایدار است که $\sum_{-\infty}^{+\infty}|h(k)|<\infty$ باشد(مجموع قدر مطلق تابع ضربه محدود)

مثال: محدوده ی a برای پایداری $h(n)=a^n u(n)$ را تعیین کنید.

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a^k| = \sum_{k=0}^{\infty}|a|^k = 1+|a|+|a|^2+\cdots$$

این دنباله به $\frac{1}{1-|a|}$ همگرا می شود اگر $|a|<1$ باشد. سیستم به صورت *BIBO* پایدار است.

۳)شرط علی در سیستم گسسته *LTI*

مقدار خروجی سیستم در $n=n_0$ برابر است با

$$y(n_0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n_0-k)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0-k)+\sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0-k)$$

در جمله اول سمت راست مقادیر حال و گذشته $x(n)$ وجود دارد ولی در جمله دوم به آینده سیگنال $x(n)$ ارتباط دارد. برای اینکه سیستم علی باشد لازم است جمله دوم صفر گردد، به این معنی که برای $n<0$ مقدار $h(n)=0$ باشد.

به این ترتیب در یک سیستم علی حد جمع کانولوشن بجای $-\infty$ از صفر آغاز می گردد.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)=\sum_{-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

در هر پردازش سیگنال واقعی لازم است سیستم علی باشد چرا که به آینده سیگنال ورودی دسترسی وجود ندارد. **در سیستم *LTI* وقتی به ازای $n<0$ مقدار $h(n)$ صفر باشد. سیستم علی و در غیر این صورت غیر علی گفته می شود.** اگر ورودی $x(n)$ به ازای $n<0$ موجود نباشد می نویسیم.

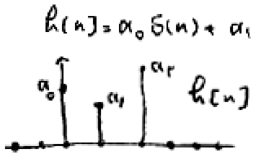
$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

۴- a)سیستم با پاسخ ضربه و نامحدود: سیستمی که پاسخ ضربه آن جملات محدود دارند را *Finite Impulse Response(FIR)* می گویند. مثل سیستم

$$y[n]=a_0x[n]+a_1x[n-1]+a_2x[n-2]$$

که تابع ضربه آن فقط ۳ جمله دارد

$$h[n]=a_0\delta(n)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)=\sum_{k=0}^{2}a_k\delta(n-k)$$



برای این سیستمها جمع کانولوشن بصورت

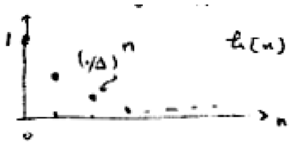
$$y[n]=\sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x(n-k)$$

تغییر می کند که برای سیستم مثال

$$y(n)=\sum_{n=0}^{2} h(k)x(n-k)$$

۴- b)سیستم با پاسخ ضربه نامحدود(*Infinite Impulse response*(*IIR*: در این سیستم پاسخ ضربه طول محدود ندارد. مثل سیستم $y(n)=0.5\,y(n-1)+x(n)$ که پاسخ ضربه آن

$$h[n]=0.5\,y(n-1)+\delta(n)$$



۵)سیستم ریکرسیو و غیر ریکرسیو*recursive-nonrecursive*

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$$

سیستمی که در آن خروجی فقط به ورودی بستگی دارد سیستم غیر ریکرسیو و سیستمی که در آن خروجی به ورودی و خروجی بستگی دارد سیستم ریکرسیو خوانده می شود.

$$y(n)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i y(n-i)+\sum_{j=0}^{\infty} b_j x(n-j)$$

مثال: سیستم جذر گیر برای $\sqrt{A}$

$$\begin{cases} y(n)=\frac{1}{2}\left[y(n-1)+\frac{A}{y(n-1)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{y^2(n-1)+A}{y(n-1)}\right] \\ y(-1) \end{cases}$$

شرط اولیه

$$\sqrt{5}\ \text{برای} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ y(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow y(n)=\{2,\ \underset{0}{2.25},\ 2.236,\ 2.236,\ 2.236,\ 2.236\} \Rightarrow \sqrt{5}=2.236$$

۶) سیستم گسسته حقیقی و کمپلکس

سیستم گسسته حقیقی پاسخ ضربه حقیقی و ضرایب معادله دیفرنس نیز حقیقی است در مقابل سیستم گسسته کمپلکس دارای پاسخ ضربه و ضرایب معادله دیفرنس کمپلکس است.

۴-۲-۱ حل معادلات تفاضلی

حل معادلات تفاضلی مشابه حل معادلات دیفرانسیل است جواب از دو بخش عمومی و خصوصی تشکیل می گردد. جواب عمومی با صفر قرار دادن ورودی بدست می آید و جواب خصوصی پاسخ سیستم به تحریک ورودی است. معادله دیفرنس مقابل را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k\, y(n-k)=\sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

جواب معادله بصورت $y(n)=yh(n)+yp(n)$ است که در آن $yh(n)$ جواب عمومی و $yp(n)$ جواب خصوصی است .

a)جواب عمومی : جواب عمومی معادله دیفرنس به صورت $yh(n)=\lambda^n$ است که در معادله با ورودی صفر صدق می کند.

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda^{n-k}=0 \Rightarrow \lambda^{n-N}(\alpha_0\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n)=0 \Rightarrow$$

$$\alpha_0\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n=0$$

معادله مشخصه

معادله مشخصه سیستم دارای N جواب است. که البته می تواند ریشه های تکراری نیز داشته باشد اگر فرض کنیم N-Lریشه و L ریشه تکراری داشته باشد جواب عمومی بصورت زیر نوشته می شود.

$$y_h(n)=A_1\lambda_1^n+A_2\lambda_2^n \cdots A_{N-1}\lambda_{N-L}^n+\sum_{i=0}^{L-1} A_i n^i \lambda_L^n$$

b) جواب خصوصی : اگر ورودی $x(n)=R(n)$ باشد مشابه آن باید در معادله صدق کند. جواب خصوصی برای تعدادی از ورودیها در جدول ذیل ارائه شده است.

Input Signal, $x(n)$	Particular Solution, $y_p(n)$
A (constant)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0n^M + K_1n^{M-1} + \cdots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0n^M + K_1n^{M-1} + \cdots + K_M)$
$\begin{Bmatrix} A\cos\omega_0 n \\ A\sin\omega_0 n \end{Bmatrix}$	$K_1\cos\omega_0 n + K_2\sin\omega_0 n$

از قرار دادن $yp(n)$ به همراه $x(n)$ در معادله دیفرنس وقتی شرایط اولیه صفر باشد ضرایب k بدست می آیند.

c)جواب کلی معادله

$$y(n)=y_h(n)+y_p(n)=\sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n + y_p(n)$$

ولتای M پارامتری مجهول است که باید با توجه به شرایط اولیه محاسبه شوند این کار در دو مرحله انجام می شود.

۱- پاسخ سیستم به شرایط اولیه $yzi(n)$: در این حالت ورودی صفر می گرددو با توجه به معادله دیفرنس جواب عمومی و شرایط اولیه ضرایب تعیین می گردد که پاسخ $yzi(n)$ را می سازد.

۲- پاسخ سیستم به ورودی بدون شرایط اولیه $yzs(n)$: در این حالبت شرایط اولیه صفر در نظر گرفته می شود و با توجه به معادله دیفرنس و جواب کلی $yzs(n)$ محاسبه می شود.

پاسخ نهائی معادله $y(n)=yzi(n)+yzs(n)$ می باشد.

مثال ۱: پاسخ پله سیستم مقابل را بدست آورید.

$$y(n)+y(n-1)-6y(n-2)=x(n)$$

$$y(-2)=-1,\quad y(-1)=1,\quad x(n)=8u(n)$$

معادله مشخصه $\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-3 \Rightarrow y_h(n)=A_1(-3)^n+A_2(2)^n$

$$x(n)=8u(n) \Rightarrow y_p(n)=\beta u(n) \Rightarrow$$

در معادله دیفرانس قرار می‌دهیم:

$$\beta u(n)+\beta u(n-1)-6\beta u(n-2)=8u(n)$$

برای $n\geq 2 \Rightarrow \beta+\beta-6\beta=8 \Rightarrow \beta=-2 \Rightarrow y_p(n)=-2u(n)$

$$\Rightarrow y(n)=A_1(-3)^n+A_2(2)^n-2u(n)$$

محاسبه ی پارامترهای جواب نهائی: ۱) $yzi \Rightarrow x(0)=0$

$$\begin{cases} y(0)=-y(-1)+6y(-2)=-7=y_h(0)=A_1+A_2 \\ y(1)=-y(0)+6y(-1)=13=y_h(1)=-3A_1+2A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-5.4 \\ A_2=-1.6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{zi}(n)=-5.4(-3)^n-1.6(2)^n$$

۲) شرایط اولیه صفر: yzs

$$\begin{cases} y(0)=-y(-1)+6y(-2)+8=8=y(0)=A_1+A_2-2 \\ y(1)=-y(0)+6y(-1)+8=0=y(1)=-3A_1+2A_2-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=3.6 \\ A_2=6.4 \end{cases} \Rightarrow y_{zs}(n)=3.6(-3)^n+6.4(2)^n-2$$

$$\Rightarrow y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)=-1.8(-3)^n+4.8(2)^n-2 \qquad n\geq 0$$

تعیین ضرایب در یک مرحله(وقتی ورودی به شکل $x(n)u(n)$ باشد)

$$y(0)=-y(-1)+6y(-2)+8=A_1(-3)^0+A_2(2)^0-2=A_1+A_2-2=-1-6+8=1$$
$$y(1)=-y(0)+6y(-1)+8=A_1(-3)^1+A_2(2)^1-2=-3A_1+2A_2-2=13$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A_1+A_2=3\\-3A_1+2A_2=15\end{cases}\Rightarrow y(n)=-1.8(-3)^n+4.8(2)^n-2\qquad n\geq 0$$

وقتی ورودی حالت فوق را نداشته باشد مانند $u(n-1)$ از روش فوق نمی توان استفاده کرد.

اگر ورودی $x(n)u(n)$ باشد و $x(n)=\delta(n)$ نباشد از روش ذیل نیز می توان استفاده کرد.

$$y(-1)=+1=A_1(-3)^{-1}+A_2(2)^{-1}-2$$
$$y(-2)=-1=A_1(-3)^{-2}+A_2(2)^{-2}-2\Rightarrow\begin{cases}-A_1/3+A_2/2=3\\A_1/9+A_2/4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A_2=4.8\\A_1=-1.8\end{matrix}$$

مثال ۲:پاسخ سیستم مثال ۱ را به ورودی $2^n u(n)$ بدست آورید.

$y(n)+y(n-1)-6y(n-2)=2^n u(n)$

از مثال قبل داریم

$$y_h(n)=A_1(-3)^n+A_2(2)^n$$

از آنجائیکه ورودی مشابه یکی از مدهای سیستم است، جواب خصوصی بصورت $yp(n)=\beta n*2^n$ نوشته می شود.

$$n\geq 2:\ \beta n(2)^n+\beta(n-1)(2)^{n-1}-6\beta(n-2)(2)^{n-2}=2^n\Rightarrow\beta=0.4$$
$$\Rightarrow y(n)=A_1(-3)^n+A_2(2)^n+0.4n(2)^n$$

از آنجائیکه ورودی برای $0=<n<2$ غیر صفر است می نویسیم:

$$y(0)=-y(-1)+6y(-2)+2^0=A_1+A_2=-6$$
$$y(1)=-y(0)+6y(-1)+2=-3A_1+2A_2+0.4\times 2=14\Rightarrow\begin{cases}A_1+A_2=-6\\-3A_1+2A_2=13.2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A_1=-5.04\\A_2=-0.96\end{cases}\Rightarrow y(n)=-5.04(-3)^n-0.96(2)^n+0.4n(2)^n\quad n\geq 0$$

مثال۳: پاسخ ضربه و پله سیستم $y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+x(n-1)$ تحت شرایط اولیه صفر را بدست آورید.

جواب:

$$\lambda^2-3\lambda-4=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\ \lambda_2=4\Rightarrow y_h(n)=A_1(-1)^n+A_2(4)^n$$

پاسخ ضربه با فرض ورودی $x(n)$

$$y(0)=3y(-1)+4y(-2)+\delta(0)=A_1+A_2=1$$
$$y(1)=3y(0)+4y(-1)=-A_1+4A_2=3\Rightarrow\begin{cases}A_2=\frac{4}{5}\\A_1=\frac{1}{5}\end{cases}$$
$$\Rightarrow y_1(n)=\frac{1}{5}(-1)^n+\frac{4}{5}(4)^n$$

سپس از قاعده جمع آثار جواب نهایی بدست می آید.

$$y(n)=y_1(n)+y_1(n-1)=(0.2(-1)^n+0.8(4)^n)u(n)+(0.2(-1)^{n-1}+0.8(4)^{n-1})u(n-1)$$
$$\Rightarrow n=0\Rightarrow y(n)=1$$
$$n\geq 1\Rightarrow y(n)=-0.2(-1)^n+1.2(4)^n\Rightarrow y(n)=-0.2(-1)^n+1.2(4)^n$$

پاسخ پله سیستم

$$\Rightarrow \beta u(n) - 3\beta u(n-1) - 4\beta u(n-2) = u(n)$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_p(n) = -\frac{1}{4}u(n)$$

$$\Rightarrow y_1(n) = A_1(-1)^n + A_2(4)^n - \frac{1}{4}u(n)$$

از آنجا ئیکه شرایط اولیه صفر منظور شده است

$$y(0) = x(0) = 1 = A_1 + A_2 - \frac{1}{4}$$

$$y(1) = 3y(0) + x(1) = 4 = -A_1 + 4A_2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0.14 \\ A_2 = \frac{17}{15} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1(n) = 0.1(-1)^n + \frac{17}{15}(4)^n - \frac{1}{4}u(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = y_1(n) + 2y_1(n-1) \Rightarrow n = 0 \Rightarrow y(n) = 0.1 + \frac{17}{15} - \frac{1}{4}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow y(n) = -0.1(-1)^n + 1.7(4)^n - \frac{1}{2}$$

مثال ۴: پاسخ سیستم $y(n)-2y(n-1)=nx(n)$ را تحت شرایط اولیه $y(-1)=1$ بدست آورید.

$$\Rightarrow \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow y_h(n) = A(2)^n$$

$$\Rightarrow y_p(n) = \alpha + \beta n \Rightarrow \alpha + \beta n - 2(\alpha + \beta(n-1)) = n \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(n) = A(2)^n - 2 - n \Rightarrow y(0) = 2y(-1) + 0 = A - 2 - 0 = 2 = A - 2 \Rightarrow A = 4$$

$$\Rightarrow y(n) = 4(2)^n - 2 - n$$

مثال ۵: پاسخ سیستم $y(n)-y(n-1)+0.5y(n-2)=u(n)$ تحت شرایط اولیه $y(-2)=0$ و $y(-1)=1$ را بدست آورید.

الف: شرایط اولیه

$$y(n) - y(n-1) + .5y(n-2) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + .5 = 0 \Rightarrow \lambda = .5 \pm j.5 = \alpha e^{\pm j\omega_0} = 0.7e^{\pm j45} = 0.7e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

$$y_{zi}(n) = A_1(\alpha e^{j\omega_0})^n + A_2(\alpha e^{-j\omega_0})^n \Rightarrow y(0) = 1 = A_1 + A_2$$

$$y(1) = 1 - .5 = .5 = A_1\alpha e^{j\omega_0} + A_2\alpha e^{-j\omega_0}$$

$$\Rightarrow A_2 = 1 - A_1 \Rightarrow .5 = A_1\alpha e^{j\omega_0} + (1 - A_1)\alpha e^{-j\omega_0} \Rightarrow A_1 = \frac{.5 - \alpha e^{-j\omega_0}}{\alpha e^{j\omega_0} - \alpha e^{-j\omega_0}}, \quad A_2 = A_1^* = \frac{.5 - \alpha e^{j\omega_0}}{\alpha e^{-j\omega_0} - \alpha e^{j\omega_0}}$$

ب: به ورودی با شرایط اولیه صفر

$$y(n) - y(n-1) + .5y(n-2) = u(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = A_3(\alpha e^{j\omega})^n + A_4(\alpha e^{-j\omega})^n + \frac{1}{.5} \Rightarrow y(0) = 1 = A_3 + A_4 + 2$$

$$y(1) = 2 = A_3(\alpha e^{j\omega}) + A_4(\alpha e^{-j\omega}) + 2$$

$$\Rightarrow A_4 = -1 - A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{+\alpha e^{-j\omega}}{\alpha e^{j\omega} - \alpha e^{-j\omega}}, \quad A_4 = A_3^* = \frac{+\alpha e^{j\omega}}{\alpha e^{-j\omega} - \alpha e^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow y(n) = (A_1 + A_3)(\alpha e^{j\omega})^n + (A_2 + A_4)(\alpha e^{-j\omega})^n + 2$$

$$= \frac{.5}{\alpha e^{j\omega} - \alpha e^{-j\omega}}(\alpha e^{j\omega})^n + \frac{.5}{\alpha e^{-j\omega} - \alpha e^{j\omega}}(\alpha e^{-j\omega})^n + 2 \qquad n \geq 0$$

روش دوم: ترکیب ورودی و شرایط اولیه

$$y(0)=y(-1)+x(0)=2=A_1+A_2+2 \Rightarrow A_1=-A_2$$

$$y(1)=y(0)-0.5y(-1)+x(1)=2.5=A_1(\alpha e^{j\omega})+A_2(\alpha e^{-j\omega})+2 \Rightarrow A_1=\frac{0.5}{\alpha e^{j\omega}-\alpha e^{-j\omega}},\ A_2=A_1^*$$

$$y(n)=A_1(\alpha e^{j\omega})^n+A_2(\alpha e^{-j\omega})^n+2 \qquad n\geq 0$$

مربوط به بعد از کسر

روش دوم

روش سوم

$$y(n)=A_1(\alpha e^{j\omega})^n+A_2(\alpha e^{-j\omega})^n+2$$

$$y(-1)=1=A_1\alpha^{-1}e^{-j\omega}+A_2\alpha^{-1}e^{j\omega}+2 \Rightarrow A_2=\frac{-1-A_1\alpha^{-1}e^{-j\omega}}{\alpha^{-1}e^{j\omega}}$$

$$y(-2)=0=A_1\alpha^{-2}e^{-2j\omega}+A_2\alpha^{-2}e^{2j\omega}+2$$

$$\Rightarrow A_1=\frac{-2+\alpha^{-1}e^{j\omega}}{\alpha^{-2}e^{-2j\omega}+\alpha^{-2}e^{2j\omega}(-e^{-2j\omega})}=\frac{2-\alpha^{-1}e^{j\omega}}{\alpha^{-2}e^{-j\omega}(e^{j\omega}-e^{-j\omega})}=\frac{2\alpha^2e^{j\omega}-\alpha e^{2j\omega}}{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}$$

$$A_2=A_1^*$$

هم جواب

$$\frac{2\alpha^2e^{j\omega}-\alpha e^{2j\omega}}{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}\neq\frac{1}{2j}\neq\frac{0.5}{\alpha e^{j\omega}-\alpha e^{-j\omega}}$$

مثال۶: پاسخ سیستم $y(n)-0.5y(n-1)=2C0s(n\omega0)u(n)$ تحت شرایط اولیه $y(-1)=1$ را بدست آورید.

الف: اعمال شرایط اولیه

$$y(n)-0.5y(n-1)=0$$

$$\lambda=0.5 \Rightarrow y_1(n)=A(0.5)^n \Rightarrow y(0)=0.5y(-1)=0.5=A \Rightarrow y_1(n)=0.5\times(0.5)^n u(n)$$

ب: اعمال ورودی با شرایط اولیه صفر

$$y(n)-0.5y(n-1)=2\cos n\omega_0=e^{jn\omega_0}+e^{-jn\omega_0}$$

جواب خصوصی برای $e^{jn\omega_0}$

$$\Rightarrow \beta e^{jn\omega_0}-0.5\beta e^{j(n-1)\omega_0}=e^{jn\omega_0} \Rightarrow \beta=\frac{1}{1-0.5e^{-j\omega_0}}=\alpha e^{j\varphi}$$

$$y_2(n)=A(0.5)^n+\beta e^{jn\omega_0}+\beta^* e^{-jn\omega_0}=A(0.5)^n+2\alpha\cos(n\omega_0+\varphi)$$

$$y_2(0)=0.5\times 0+2=A+2\alpha\cos\varphi \Rightarrow A=2-2\alpha\cos\varphi \Rightarrow y_2(n)=(2-2\alpha\cos\varphi)0.5^n+2\alpha\cos(n\omega_0+\varphi)$$

$$\Rightarrow y(n)=(2.5-2\alpha\cos\varphi)0.5^n+2\alpha\cos(n\omega_0+\varphi) \qquad n\geq 0$$

روش دوم: از آنجائیکه ورودی از صفر شروع می شود می توان نوشت:

$$y(0)=0.5y(-1)+2\cos(0\times\omega_0)=2.5=A(0.5)^0+2\alpha\cos(0\omega_0+\varphi) \Rightarrow A=2.5-2\alpha\cos\varphi$$

کوشش برای حل فرض است

روش سوم: ورودی از صفر شروع می شود و در $n=-1$ غیر صفر است.

$$y(-1)=A_1(0.5)^{-1}+2\alpha\cos(\varphi-\omega_0)=1 \Rightarrow A=0.5-\alpha\cos(\varphi-\omega_0)$$

$$\Rightarrow y(n)=(0.5-\alpha\cos(\varphi-\omega_0))(0.5)^n+2\alpha\cos(n\omega_0+\varphi)$$

به روش ذیل می توان نشان داد که $A1=A$ است.

$$\beta=\frac{1}{1-0.5e^{-j\omega_0}}=\alpha e^{j\varphi} \Rightarrow \alpha e^{j\varphi}-0.5\alpha e^{j(\varphi-\omega_0)}=1$$

$$\Rightarrow a\cos\varphi - 0.5\,a\cos(\varphi - w_0) = 1$$

$$\Rightarrow A_1 = 0.5 - a\cos(\varphi - w_0) = 0.5 + 2 - 2a\cos\varphi = 2.5 - 2a\cos\varphi$$

$y_{ss}[n] = 2a\cos(nw_0 + \varphi)$

نکته: با دقت به پاسخ اجباری معادلات خطی خروجی سیستم به ورودی سینوسی، سینوسی با دامنه متفاوت و فاز متفاوت تولید می‌کند. به این ترتیب β دامنه و فاز سیگنال خروجی را مشخص می‌کند. با توجه به معادله تفاضلی $y(n) - \beta y(n-1) = x(n)$ که $\beta = \frac{1}{1-\beta e^{-jw}}$ است این به آن معنی است که یک واحد تأخیر به صورت e^{-jw} در رابطه β ظاهر می‌گردد. این موضوع در تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم روشنتر می‌گردد.

۳-۴ تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال $x(n)$ طبق تعریف برابر است با

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

تبدیل Z سیگنال $x(n)$ وجود دارد اگر سری توانی $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$ همگرا شود. بنابراین در کنار هر تبدیل Z می باید ناحیه همگرائی آن *Region of Convergence(ROC)* بیان شود.

مثال:

$\rightarrow x_1(n)=\{1,2,5,7,0,1\} \Rightarrow X_1(z)=1+2z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+z^{-5}$

ROC: تمام صفحه به استثنای $z=0$ (زیرا به ازای $z=0$ ، $X_1(z)$ بینهایت می شود)

$\rightarrow x_2(n)=\delta(n) \Rightarrow X_2(z)=1$

ROC: تمام صفحه z

$\rightarrow x_3(n)=\delta(n+k) \quad k>0 \Rightarrow X_3(z)=z^{k}$

ROC: تمام صفحه z به استثنای $z=\infty$

از مثالهای فوق بر می آید که تمام سیگنالها با طول محدود دارای ROC شامل تمام صفحه به استثنای احتمالا $z=0$ و $z=\infty$ هستند.

۱-۳-۴ ناحیه همگرائی :

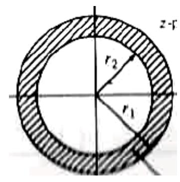
اگر Z را به صورت $re^{j\theta}$ بنویسیم آن هنگام می توان نوشت

$$|X(z)|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\right|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-jn\theta}\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}e^{-jn\theta}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}\right|<\infty$$

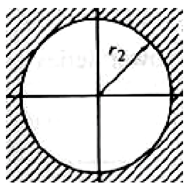
به این ترتیب موضوع پیدا کردن ناحیه همگرائی تبدیل به یافتنی محدوده ای برای r می شود که $|X(z)|$ محدود بدست می آید. اگر رابطه اخیر را توسعه دهیم اینگونه ارائه می یابد

$$|X(z)|\le\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|x(n)r^{-n}\right|+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x(n)}{r^{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x(n)r^{n}\right|+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x(n)}{r^{n}}\right|$$

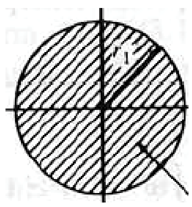
اگر جمله اول به ازای بزرگترین شعاع $r1$ همگرا گردد به ازای تمام $0<r<r1$ نیز همگرا است و اگر جمله دوم به ازای کوچکترین شعاع $r2$ همگرا گردد به ازای شعاعهای $r>r2$ نیز همگرا است . اگر $r2>r1$ باشد ناحیه همگرائی وجود ندارد و اگر $r2<r1$ باشد حلقه همگرائی بدست می آید.



ناحیه همگرایی: هر دوجمله اگر $r2<r1$ باشد



ناحیه همگرایی: جمله دوم



ناحیه همگرایی: جمله اول

مثال

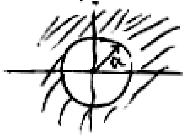
$$1)\ x_1(n)=a^n u(n) \Rightarrow X_1(z)=\sum_{0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^n$$

از آنجایی که به اثر سری

$\frac{1}{1-A}$ با شرط مقدار $|A|<1$ با مقدار $1+A+A^2+A^3+\dots$

هندسی شود، می نویسیم

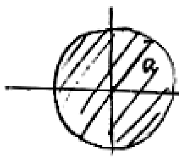
$$X_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad ROC: |az^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>|a|$$



$$2)\ x_2(n)=-a^n u(-n-1) \Rightarrow X_2(z)=\sum_{-\infty}^{-1}(-a^n) z^{-n}$$

$$\Rightarrow X_2(z)=-\sum_{\ell=1}^{\infty}(a^{-1}z)^{\ell} = -\left(\frac{1}{1-a^{-1}z}-1\right)=$$

$$\frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad ROC: |a^{-1}z|<1 \Rightarrow |z|<a$$



$$X_1(z)=X_2(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

نکته: در مثال فوق $x1(n)=a^n u(n)$ و $x2(n)=-a^n u(-n-1)$ هر دو تبدیل Z برابر داشتند بنابراین تابع تبدیل Z بیان کننده یک سیگنال خاص نیست مگر آنکه ROC کنار تابع تبدیل آورده شود برای سیگنال $x1(n)$ که به ازای $n>=0$ مقدار دارد. ROC خارج دایره به شعاع a است. و برای سیگنال $x2(n)$ که به ازای $n<0$ مقدار دارد ROC داخل دایره ای است که شعاع a تعیین می کند به عبارت دیگر برای تابع تبدیل Z در سیگنال یکی علی $x1(n)$ و دیگری غیر علی $x2(n)$ وجود داشت. برای سیگنال علی ROC به سمت خارج دایره و برای سیگنال غیر علی ROC داخل دایره است.

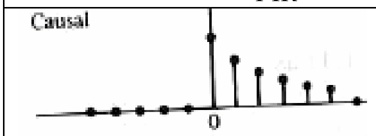
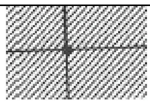
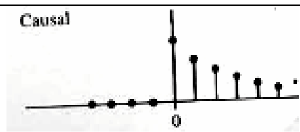
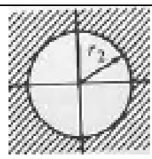
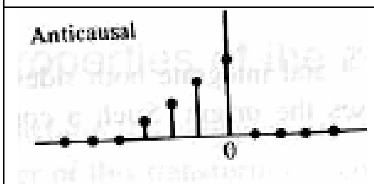
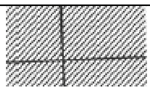
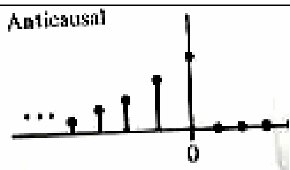
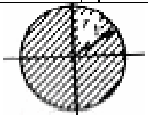
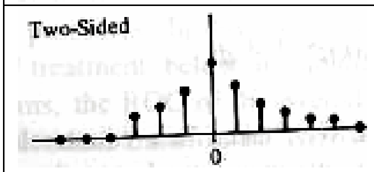
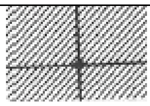
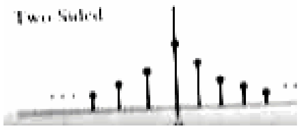
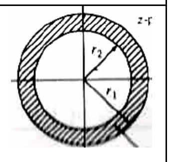
خلاصه مطالب همگرائی

۱- اگر سیگنال طول محدود داشته باشد ROC آن کل صفحه به استثنای احتمالا $z=0$ و $z=\infty$ است

۲- اگر سیگنال علی باشد ROC آن سمت خارج دایره مرز همگرائی گسترش دارد.

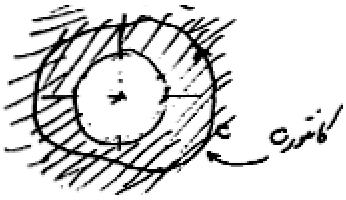
۳- اگر سیگنال غیر علی باشد ROC به سمت داخل دایره مرز همگرائی گسترش می یابد.

۴- اگر سیگنال مجموعه بخش علی و غیر علی باشد ممکن است نوار حلقه همگرائی بدست آید. اگر شعاع مربوط به بخش علی $r2$ کوچکتر از شعاع مربوط به بخش غیر علی $r1$ باشد.

FIR		IIR	
	 ROC:z≠0		 ROC: |z|>r2
	 ROC:z≠∞		 ROC: |z|<r1
	 ROC:z≠o, z≠∞		 ROC: r2<|z|<r1

۴-۳-۲ عکس تبدیلZ

اپراتور عکس تبدیل Z ، میدان Z را به میدان زمان منتقل می کند .



$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

کانتور C در عکس جهت عقربه های ساعت در منطقهROC بوده و مبدا را دور می زند. معمولا تابع تبدیل Z به صورت کسری است و برای محاسبه عکس آن راههای ساختاری به جای محاسبه فرمول فوق و گرفتن انتگرال وجود دارد.

۴-۳-۳ خواص تبدیل z

	سیگنال	تبدیل z	ROC
	$x(n)$	$X(z)$	$ROC_1: r_{12}<\|z\|<r_{11}$
	$h(n)$	$H(z)$	$ROC_2: r_{22}<\|z\|<r_{21}$
خطی بودن	$ax(n)+h(n)$	$aX(z)+bH)z)$	$ROC_1 \cap ROC_2$ حداقل
ضرب در a^n	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	
معکوس در زمان	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	
مشتق در میدان z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	ROC_1
کانولوشن	$x(n)\otimes h(n)$	$X(z)H(z)$	$ROC_1 \cap ROC_2$ حداقل
همبستگی	$rxh(l)=x(l)\otimes h(-l)$	$Rxh(z)=X(z)H(z^{-1})$	$[ROC: X_2(z^{-1})] \cap ROC_1$ حداقل
ضرب	$x(n)h(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)H(\frac{z}{v})v^{-1}dv$	$r_{12}r_{22} < \|z\| < r_{11}r_{21}$ حداقل
شیفت زمانی	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$ROC_1 - \begin{cases} z=0 & k>0 \\ z=\infty & k<0 \end{cases}$
تبدیل z یک طرفه			
تبدیل z یک طرفه	$x(n)$	$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) z^{-n}$	منحصر بفرد است و نیاز به بیان ROC ندارد
مقدار اولیه	$x(n)$	$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$	سیگنال باید علی باشد
شیفت زمانی	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z) + \sum_{m=1}^{k} x(-m)z^{m-k}$	$k>0$
		$z^{k}X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{k-m}$	$k<0$
مقدار نهایی	$x(n)$	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	دایره واحد باید جزء ROC باشد یا به عبارتی سیگنال پایدار باشد.

جدول تبدیل Z مهم

ROC	X(z)	x(n)
z همه	1	$\delta(n)$
$\|z\|>1$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$u(n)$
$\|z\|>\|a\|$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$a^n u(n)$
$\|z\|<1$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$-u(-n-1)$
$\|z\|<\|a\|$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$-a^n u(-n-1)$
$\|z\|>\|a\|$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$na^n u(n)$
$\|z\|<\|a\|$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$-na^n u(-n-1)$
$\|z\|>1$	$\frac{1-z^{-1}\cos w_0}{1-2\cos w_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\cos(nw_0)u(n)$
$\|z\|>1$	$\frac{z^{-1}\sin w_0}{1-2\cos w_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\sin(nw_0)u(n)$

مثال: تبدیل Z تابع $x(n)=3\delta(n+1)+2\delta(n)+6\delta(n-3)-\delta(n-4)$ را تعیین کنید.

$$X(z)=3z+2+6z^{-3}-z^{-4} \qquad ROC:\ \text{همه}\ -\{z=0, z=\infty\}$$

مثال: تبدیل Z تابع $x(n)$ را بدست آورید.

$$x(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0\end{cases}$$

$$X(z)=1+z^{-1}+\dots+z^{-(N-1)} \Rightarrow X(z)=\begin{cases}N & \text{if } z=1\\ \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & \text{if } z\neq 1\end{cases} \qquad ROC: All\ z-(z=0)$$

مثال :تبدیلZ تابع $x(n)$ را بدست آورید.

$$x(n)=a^n(\sin nw_0)u(n)$$

$$x(n)=a^n x_1(n) \Rightarrow x_1(n)=\frac{1}{2j}e^{jnw_0}-\frac{1}{2j}e^{-jnw_0}$$

$$Z(x_1(n))=\frac{\frac{1}{2j}}{1-e^{jw_0}z^{-1}}-\frac{\frac{1}{2j}}{1-e^{-jw_0}z^{-1}}=\frac{z^{-1}\sin w_0}{1-2z^{-1}\cos w_0+z^{-2}} \qquad ROC: |z|>1$$

$$Z(x(n))=X(a^{-1}z)=\frac{az^{-1}\sin w_0}{1-2az^{-1}\cos w_0+a^2z^{-2}} \qquad |z|>|a|$$

مثال: اتو کوریشن $a^n u(n)$ که $-1<a<1$ است را بدست آورید.

$$R_{xx}(z)=X(z)X(z^{-1})$$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad ROC: |z|>|a| \qquad \text{سیگنال علی}$$

$$X(z^{-1})=\frac{1}{1-az} \qquad ROC: |z|<\frac{1}{|a|} \qquad \text{سیگنال غیرعلی}$$

$$R_{xx}(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\cdot\frac{1}{1-az} \qquad ROC: |a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

اگر چه *x(n)* سیگنال علی فرض شد چون *ROC* مربوط به *Rxx(z)* حلقه است، *rxx(l)* سیگنال دو طرفه است.

مثال : تبدیل *Z* یک طرفه سیگنال $a^n u(n)$ را بدست آورید. نیازی به نوشتن *ROC* نیست.

$$X^{+}(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

مثال تبدیل Z یک طرفه $x(n)=a^{n-2}$ را بدست آورید.

$$X^{+}(z)=\sum_{0}^{\infty} a^{n-2}z^{-n}=a^{-2}+a^{-1}z^{-1}+\sum_{2}^{\infty} a^{n-2}z^{-n}=a^{-2}+a^{-1}z^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty} a^{k}z^{-k-2}=$$

$$a^{-2}+a^{-1}z^{-1}+z^{-2}\cdot\frac{1}{1-az^{-1}}$$

۴-۳-۴ تبدیل *Z* سیستم *LTI*

خروجی یک سیستم *LTI* با تابع ضربه *h(n)* به ورودی *x(n)* برابر است با $y(n)=x(n)\otimes h(n)$

اگر تبدیل *Z* توابع *h(n)* و *x(n)* موجود باشد، $y(z)=H(z)X(z)$ می گردد.

نسبت بین تبدیل *Z* خروجی به ورودی تابع تبدیل سیستم است که همان تبدیل *Z* تابع ضربه آن است.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

سیستمی که با معادله تفاضلی

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

نمایش داده می شود، تابع تبدیل *Z* آن اینگونه بدست می آید.

$$Y(z)=-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}Y(z)+\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}X(z)\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M}a_k z^{-k}}$$

به ریشه های مخرج قطبهای سیستم و به ریشه های صورت صفرهای سیستم می گویند. اگر $a_k=0$ باشد سیستمی با تابع تبدیل

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}$$

بدست می آید. این سیستم واضح است که تابع ضربه با طول محدود دارد که به آن *FIR* گفته می شود این سیستم دارای *M* صفر است لذا به آن سیستم تمام صفر نیز گفته می شود.

از طرفی اگر به استثنای *b0* بقیه *bk* ها صفر باشند، سیستمی با تابع تبدیل

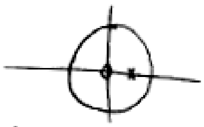
$$H(z)=\frac{b_0 z^{-N}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

بدست می آید که دارای *N* قطب است و *N* صفر تکراری در مبدا دارد. به این سیستم ، سیستم تمام قطب می گویند و از آنجاکه تابع ضربه آن نامحدود است به آن سیستم *IIR* گفته می شود..

مثال: تابع تبدیل *Z* و پاسخ ضربه واحد سیستم داده شده را بدست آورید.

$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+2x(n)$

$Y(z)=\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+2X(z) \Rightarrow H(z)=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{2z}{z-\frac{1}{2}}$



این سیستم صفری در مبدأ و قطبی در $z=\frac{1}{2}$ دارد.

تابع ضربه این سیستم از جدول برابر است با

$h[n]=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

مثال: قطب و صفرهای سیگنال

$x(n)=\begin{cases} a^n & 0\leq n\leq M-1 \\ 0 & \end{cases}$

را بدست آورید.

$X(z)=\sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{M-1}(az^{-1})^n$

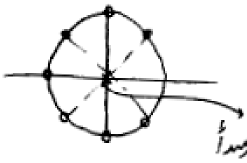
این سیستم طول محدود دارد این سیستم FIR تمام صفر است.

$=\frac{1-(az^{-1})^M}{1-az^{-1}}=\frac{z^M-a^M}{z^{M-1}(z-a)}$

صفرها برابرند با

$z^M=a^M=a^M e^{j2\pi k} \Rightarrow z_k=a e^{j2\pi k/M} \quad k=0,\dots,M-1$

این صفرها روی دایره به شعاع a و با فاصله $\frac{2\pi}{M}$ از این قرار گرفته اند. به ازای $k=0$ متناظر $z_0=a$ قطب با صفر کنسل شده و تعداد $M-1$ قطب تکراری در مبدأ بوجود می آید.



$(M-1)$
تعداد قطب در مبدأ

۴-۳-۵ محاسبه عکس تبدیل Z

برای محاسبه عکس تبدیل Z سه راه حل وجود دارد.

۱- محاسبه مستقیم از عکس تبدیل z

۲- بسط $X(z)$ به سری ها

۳- بسط به کسرهای جزیی

۴- با استفاده از $MATLAB$

روش اول: به ندرت مورد استفاده قرار می گیرد و کاربردها روشهای ۲ و۳ عمومی تر است.

روش دوم: بسط $X(z)$ به سری ها: در این روش با توجه به RDC مربوطه $X(z)$ بصورت سری توانی بسط داده می شود که در منطقه ROC همگرا باشد و سپس تابع زمانی بدست می آید.

مثال: تابع تبدیل $X(z)=\dfrac{1}{1-1/5z^{-1}+0/5z^{-2}}$ داده شده است $x(n)$ را تحت شرایط

a) ROC: $|z|\rangle 1$ سیگنال علی

b) ROC: $|z|\langle 0/5$ سیگنال غیر علی بدست آورید.

a) چون سیگنال علی است، سری توانی با توانهای منفی از طریق تقسیم صورت به مخرج کسر بدست می آوریم

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\dots$$

که مقدار $x(n)$ برابر است با : $x(z)=\left\{1,\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{15}{8},\dots\right\}$

b) در این حال سیگنال غیر علی است لذا جواب باید سری با توانهای مثبت باشد بنابراین ابتدا چند جمله ای صورت و مخرج را باید

به صورت توان صعودی z نوشته سپس تقسیم را انجام می دهیم.

$$X(Z)=\frac{1}{\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}Z^{-1}+1}=2z^{2}+6z^{3}+14z^{4}+30z^{5}+62z^{6}+\ldots$$

در این حالت برای $n\geq 0$ مقدار $x(z)=0$ است.

$$x(n)=\{\underset{-\infty}{\ldots 0,0,\ldots} 62,30,14,6,2,0,\underset{-1}{0}\}$$

روش دوم:بسط به کسرهای جزئی

حالت اول:درجه صورت بزرگتر از مخرج :صورت را به مخرج تقسیم تا یک دنباله و یک تابع کسری بدست آید که درجه صورت از مخرج کمتر باشد.

مثال:

$$X(z)=\frac{1+3z^{-1}+\frac{11}{6}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=1+2z^{-1}+\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

حالت دوم: درجه صورت کوچکتر از مخرج و قطبها غیر تکراری هستند :در این حالت $X(Z)$ را می توان اینگونه بسط داد.

$$\frac{X(Z)}{Z}=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{z-p_i}$$

دراین رابطه N تعداد قطبها است و ضرایب A_i از رابطه ذیل بدست می آید

$$A_i=\left.\frac{(z-p_i)X(z)}{z}\right|_{z=p_i}$$

مثال

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}\Rightarrow\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{z}{(z-1)(z-0.5)}=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z-0.5}$$

$$A_1=\left.\frac{(z-1)X(z)}{z}\right|_{z=1}=\frac{1}{0.5}=2\quad,\quad A_2=\left.\frac{(z-0.5)}{z}X(z)\right|_{z=0.5}=\frac{0.5}{0.5-1}=1$$

که

حالت سوم:l قطب تکراری :در این حال بسط $X(Z)$ را اینگونه باید نوشت

$$\frac{X(Z)}{Z}=\sum_{h=1}^{l}\frac{A_h}{(z-p)^{h+l-1}}$$

که در آن

$$A_1=\left.(z-p)^{l}\frac{X(z)}{z}\right|_{z=p}\quad\ldots\quad A_l=\frac{1}{(l-1)!}\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}\left[\frac{(z-1)^{l}X(z)}{z}\right]_{z=p}$$

می باشد. بعد از تجزیه کسرها به جملات $\frac{1}{z-p_k}$ که در نهایت برای $X(z)$ بصورت $\frac{1}{1-P_k z^{-1}}$ بدست می آیند. عکس تبدیل Z گرفته می شود که نتیجه می دهد.

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-P_k z^{-1}}\right\}=\begin{cases}(P_k)^n u(n) & ROC:\ |z|>|P_k|\\ -(P_k)^n u(-n-1) & ROC:\ |z|<|P_k|\end{cases}$$

حالت چهارم :در صورتیکه ریشه های کمپلکس داشته باشیم ضرایب نیز به صورت کمپلکس در می آیند و عکس تبدیلZ آنرا

به صورت زیر توان نوشت

$$Z^{-1}\left[\frac{A_k}{1-P_k z^{-1}}+\frac{A_k^*}{1-P_k^* z^{-1}}\right]=2|A_k|\, r_k^n \cos(\beta_k n+\alpha_k)\, u(n)$$

که در آن $A_k=|A_k|e^{j\alpha_k}$ و $P_k=r_k e^{j\beta_k}$ قطب مزدوج است . سیگنال علی است . $ROC: |z|>r_k$

مثال:

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

a) $ROC: |z|>1$ b) $ROC: |z|<0.5$ c) $ROC: 0.5<|z|<1$

$$X(z)=\frac{A_1}{1-z^{-1}}+\frac{A_2}{1-0.5z^{-1}}=\frac{2}{1-z^{-1}}+\frac{-1}{1-0.5z^{-1}}$$

a) ROC: $|z|\rangle 1$ هر دو قسمت باید سیگنال علی باشند.

$$x(n)=2(1)^n u(n)-(0.5)^n u(n)$$

b) ROC: $|z|<0.5$ هر دو قسمت باید سیگنال غیر علی باشند

$$x(n)=-2(1)^n u(-n-1)-\left[-(0.5)^n u(-n-1)\right]$$

c) ROC: $0.5<|z|<1$ بخش دارای قطب ۰/۵ علی و بخش دارای قطب۱ غیر علی است پس

$$x(n)=-2(1)^n u(-n-1)-(0.5)^n u(n)$$

مثال: سیگنال علی $x(n)$ تبدیل Z مقابل را دارد . آنرا بدست آورید

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

$$\Rightarrow z^2-z+0.5=0 \Rightarrow \quad P_1,P_2=0.5\pm j0.5=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{A_1}{1-P_1 z^{-1}}+\frac{A_2}{1-P_2 z^{-1}} \Rightarrow A_1=A_2^*=\frac{1}{2}-j\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j71.565^\circ}$$

$$\Rightarrow x(n)=\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left[\frac{n\pi}{4}-71.565^\circ\right]u(n)$$

مثال: مقدار نهائی پاسخ سیستم علی $\frac{1}{1-az^{-1}}$ به پله را تعین کنید.

$$y(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow y_\infty=\lim_{z\to 1}(z-1)\,y(z)=\frac{1}{1-a}$$

روش چهارم: با *MATLAB* و دستور *y=filter(p,d,x)* پاسخ زمانی بدست می آید .*x* ورودی و *p* و *d* ضرایب تابع تبدیل و *y* خروجی است.

۴-۳-۶ تجزیه تابع تبدیل

تابع تبدیل *H(z)* را در نظر بگیرید که ممکن است درجه صورت *M* از درجه مخرج *N* بزرگتر باشد

$$H(z)=\frac{\sum_{k=1}^{M} b_h z^{-h}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-h}}$$

کسر مذکور را می توان اینگونه تجزیه کرد.

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-N} C_{\ell} z^{-k}+\sum_{k=1}^{k_1}\frac{b_{\ell}}{1+\alpha_{\ell} z^{-1}}+\sum_{\ell=1}^{k_2}\frac{b_{0\ell}+b_{1\ell} z^{-1}\cdots}{1+\alpha_{1\ell} z^{-1}+\alpha_{2\ell} z^{-2}}+\sum_{\ell=1}^{\ell}\frac{b_{\ell}}{(1+a_{\ell} z^{-1})^{\ell}}$$

که در آن $k1$ قطب ساده ، $k2$ جفت قطب کمپلکس و یک قطب ساده با تکرار l است.

نحوه دیگر تجزیه کسر می تواند اینگونه باشد

$$X(z)=b_0\prod_{k=1}^{k_1}\frac{(1+b_{\ell} z^{-1})}{(1+a_{\ell} z^{-1})}\prod_{\ell=1}^{k_2}\frac{1+b_{1\ell} z^{-1}+b_{2\ell} z^{-2}}{1+a_{1\ell} z^{-1}+a_{2\ell} z^{-2}}$$

۴-۳-۷ سیستم علی و سیستم پایدار

سیستم $H(z)$ علی است اگر برای $n<0$ مقدار $h(n)=0$ باشد به عبارت دیگر $H(z)$ وقتی علی است که ROC آن خارج دایره مرز همگرائی را در بر بگیرد .

در تعریف پایداری $BIBO$ گفته شد که برای پایداری باید

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$$

باشد شرطی که تحقق این امر بر $H(z)$ اعمال می کند اینگونه بدست می آید

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}\leq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n) z^{-n}|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)||z^{-n}|$$

اگر رابطه را برای $|z|=1$ بنویسیم بدست می آید

$$H(z)\leq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|$$

فرمول اخیر به این معنی است که اگر سیستم پایدار باشد دایره $|z|=1$ جزء ROC است عکس این قضیه نیز صحیح است

اگر سیستم غیر علی باشد شرط پایداری بصورت $|z|<(r>1)$ و اگر سیستم غیر علی باشد $|z|>(r<1)$ در می آید که در حالت اخیر به این معنی است که برای پایداری، تمام قطبهای $H(z)$ باید داخل دایره واحد قرار گیرند

۴-۳-۸ آزمون پایداری شور- کوهن *Shur-Cohn*

چند جمله ای مخرج تابع تبدیل که به نام معادله مشخصه خوانده می شود را در نظر بگیرید هدف این است که موقعیت ریشه های معادله مشخصه در صفحه z تعیین شود که آیا داخل دایره واحد (سیستم پایدار) یا خارج دایره واحد (سیستم ناپایدار) قرار دارد دستور العمل ذیل پارامترهای K_i تولید می کند که شرط پایداری سیستم $|K_i|<1 \quad i=1,\dots,N$ است.

برای تعیین پایداری سیستم

$$H(z)=\frac{q(z)}{p(z)}\Rightarrow p(z)=1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-h}$$

را در نظر گرفته جدول ذیل را مطابق دستور العمل حاشیه جدول تشکیل داده و پایداری سیستم را بدون نیاز به محاسبه ریشه ها کنترل کند.

$P(z) \Rightarrow$	A_N A'_N	$1 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{N-1} \quad a_N$ $a_N \quad a_{N-1} \quad \cdots \quad a_1 \quad 1$	$K_N=a_N$
$A_{N-1}=\dfrac{A_N-K_N A'_N}{1-K_N{}^2}$	A_{N-1} A'_{N-1}	$1 \quad b_1 \quad b_{N-1} \quad 0$ $b_{N-1} \quad b_{N-2} \quad 1$	$K_{N-1}=b_{N-1}$
$A_{N-2}=\dfrac{A_{N-1}-K_{N-1}A'_N-1}{1-K_{N-1}{}^2}$	A_{N-2} A'_{N-2}	$1 \quad c_1 \quad c_{N-2} \quad 0 \quad 0$ $c_{N-2} \quad c_{N-3} \quad \cdots \quad 1$	$K_{N-2}=c_{N-2}$
	. .		
	A_1 A'_1	$1 \quad x_1$ $x_1 \quad 1$	$K_1=x_1$

ریشه های $p(z)$ و به تبع آن قطبهای $H(z)$ داخل دایره واحد قرار دارند اگر $|K_i|<1 \;\; i=1,\dots,N$ باشد.

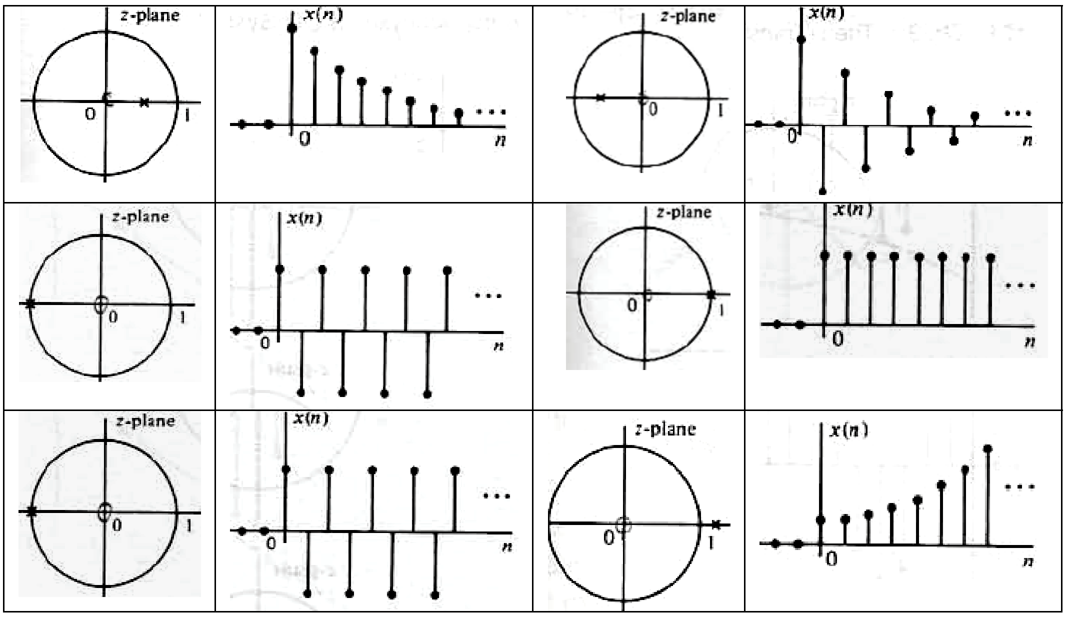
مثال: در پایداری سیستم $H(z)=\dfrac{1}{1+0.2z^{-1}+0.1z^{-2}+0.5z^{-3}}$ بحث کنید.

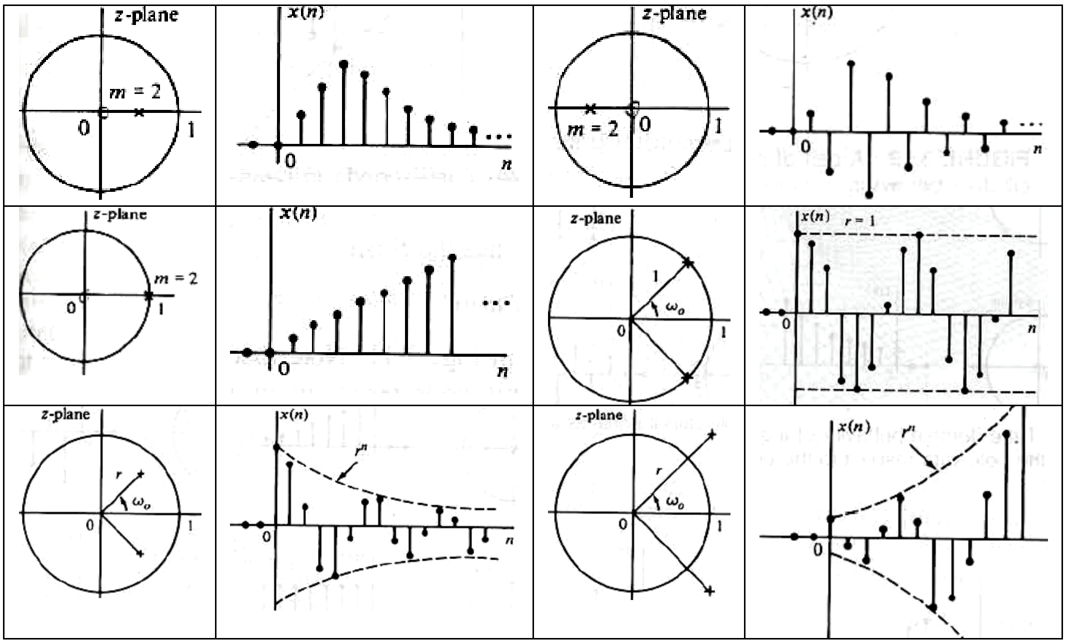
A_3	1	0.2	0.1	0.5	$K_3=0.5$
A'_3	a_N	a_{N-1}	a_1	1	
A_2	1	0.2	0	0	$K_2=0$
A'_2	0	0.2	1		
A_1	1	0.2	0	0	$K_1=0.2$
A'_1	0.2	1			

چون قدر مطلق $|K_3|$ و $|K_2|$ و $|K_1|$ کوچکتر از ۱ است $H(z)$ پایدار است یعنی قطبها داخل دایره واحد قرار دارند.

۴-۳-۹ موقعیت قطبها و رفتار سیستم

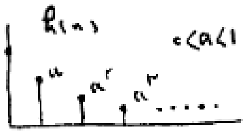
شکلها موقعیت قطبها و پاسخ ضربه مربوط سیستمهای خطی را نشان میدهند.





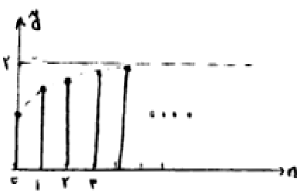
۱) رفتار سیستم درجه ۱:

سیستم درجه ۱ پایدار علی $0<a<1$ $\quad y(x)=ay(n-1)+x(n)$ را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه این سیستم اینگونـه محاسـبه میـشود.



$$Y(z)=az^{-1}Y(z)+X(z)\Rightarrow H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\Rightarrow h(n)=a^n x(n)$$

پاسخ پله این سیستم برابر است با



$$Y(z)=H(z).Y(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}.\frac{1}{1-z^{-1}}=$$

$$\frac{-a/(1-a)}{1-az^{-1}}+\frac{1/(1-a)}{1-z^{-1}}\Rightarrow y(n)=\frac{1}{1-a}(1-a^{n+1})$$

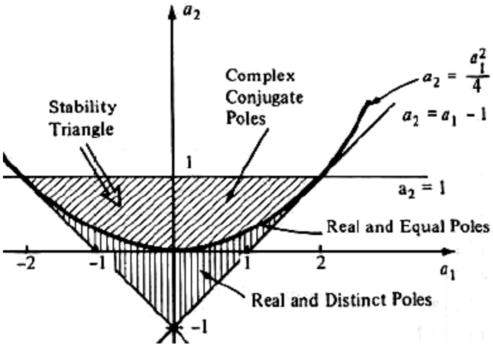
۲)بخش رفتار سیستم درجه ۲

سیستم درجه ۲

$$y(n)=-a_1 y(n-1)-a_2 y(n-2)+b_0 x(n)\Rightarrow H(z)=\frac{b_0}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}$$

را در نظر بگیرید. قطبهای این سیستم

$$p_1,p_2=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{a_1^2-4a_2}{2}}$$



می باشند. برای اینکه این سیستم پایدار باشد قطبهـای آن بایـد داخـل دایـره واحد قرار گیرند. برای بررسی پایداری سیستم درجه ۲، مثلث پایـداری وجـود دارد که می توان پایداری را از روی ضرایب تشخیص داد. اگر پارامترهای $a1$ و $a2$ نقطه ای داخل مثلث را نشان دهنـد سیـستم پایـدار و در غیـر اینـصورت ناپایدار است.

رفتار سیستم تابع موقعیت قطبهای آن است. اگر قطبهای سیستم ساده و غیر تکراری باشند پاسخ آن

$$H(z)=\frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\frac{\frac{b_0p_1}{p_1-p_2}}{1-p_1z^{-1}}-\frac{\frac{b_0p_2}{p_1-p_2}}{1-p_2z^{-1}}\Rightarrow h(n)=\frac{b_0}{p_1-p_2}\left(p_1^{n+1}-p_2^{n+1}\right)u(n)$$

و اگر قطبها تکراری باشند پاسخ آن

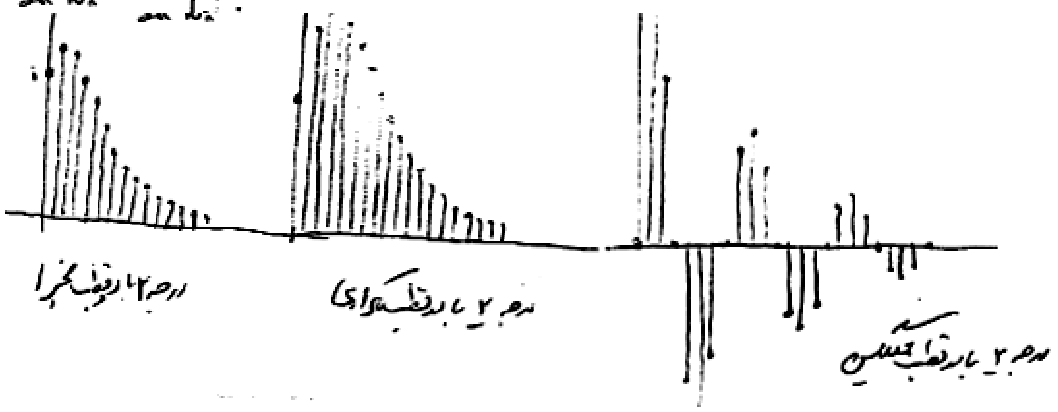
$$H(z)=\frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}\Rightarrow b_0(n+1)p^nu(n)$$

و اگر قطبها کمپلکس باشند پاسخ به قرار ذیل است.

$$H(z)=\frac{A}{1-re^{jw_0}z^{-1}}+\frac{A^*}{1-re^{-jw_0}z^{-1}}\Rightarrow A=\frac{b_0re^{jw_0}}{re^{jw_0}-re^{-jw_0}}=\frac{b_0\,e^{jw_0}}{2j\sin w_0}=\frac{b_0e^{j(w_0-90)}}{2\sin w_0}\Rightarrow$$

$$h(n)=2|A||p|^n\cos[\varphi_pn+\varphi_A]=2\times\frac{b_0}{2\sin w_0}\cdot r^n\cos[w_0n+w_0-90]=$$

$$\frac{b_0}{\sin w_0}\sin(n+1)w_0\;u(n)$$



۴-۳-۱۰ تبدیل z در کنار شرایط اولیه

اگر تبدیل z سیستمی $H(z)$ در اختیار و محاسبه خروجی با در نظر گرفتن شرایط اولیه خواسته شود راه حل این است که ابتدا معادله تفاضلی نوشته شود سپس با در نظر گرفتن شرایط اولیه تابع z برای خروجی محاسبه شود و آنگاه با استفاده از عکس تبدیل z خروجی معین شود.

مثال: تابع تبدیل سیستمی $H(z)=\frac{1}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$ است پاسخ پله این سیستم با شرایط اولیه $y(-1)=y(-2)=1$ بدست آورید.

← از تابع تبدیل می‌نویسیم. $y(n)=0.9y(n-1)-0.81y(n-2)+x(n)$

← با در نظر گرفتن شرایط اولیه تبدیل z می‌گیریم. $Y(z)=0.9\,z^{-1}[Y(z)+y(-1)z]-0.81\,z^{-2}[Y(z)+$

$$\hookrightarrow y(-۲)z^{۲} + y(-۱)z\,] + x(n) \quad \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{X(z) + [۰.۹ - ۰.۸۱ - ۰.۸۱z^{-۱}]}{۱ - ۰.۹z^{-۱} + ۰.۸۱z^{-۲}} = \frac{X(z) + [۰.۰۹ - ۰.۸۱z^{-۱}]}{۱ - ۰.۹z^{-۱} + ۰.۸۱z^{-۲}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{۱}{(۱ - z^{-۱})(۱ - ۰.۹z^{-۱} + ۰.۸۱z^{-۲})} + \frac{۰.۰۹ - ۰.۸۱z^{-۱}}{۱ - ۰.۹z^{-۱} + ۰.۸۱z^{-۲}} =$$

$$= \frac{۱٫۰۹۹}{۱ - z^{-۱}} + \frac{۰٫۵۷۸ + j۰.۴۴۵}{۱ - ۰.۹e^{j\frac{\pi}{۳}}z^{-۱}} + \frac{۰.۵۷۸ - j۰.۴۴۵}{۱ - ۰.۹e^{-j\frac{\pi}{۳}}z^{-۱}} \Rightarrow$$

$$y(n) = ۱٫۰۹۹u(n) + ۱.۴۴(۰.۹)^{n}\cos\left(n\frac{\pi}{۳} + ۳۸^{\circ}\right)u(n)$$

۴-۴ مدل فضای حالت

نوع دیگر مدل ریاضی سیستم گسسته مدل فضای حالت است. معادله دیفرنس

$$y(n)=-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)+\sum_{j=1}^{M}b_j x(n-j)$$

را بصورت تابع تبدیل

$$H(z)=\frac{\sum_{j=1}^{M-1}b_j z^{-j}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

می توان نوشت. در این رابطه شرایط اولیه و $b0$ صفر در نظر گرفته شده است. این تابع تبدیل را بصورت ذیل می توان بسط داد

$$H(z)=b_1 z^{-1}H_1(z)+b_2 z^{-2}H_1(z)+\cdots$$

$$H_1(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{Y_1(z)}{R(z)}$$

$$y_1(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y_1(n-k)+R(n)=$$

با تغییر متغیر زیر یک دسته معادلات دیفرنس درجه ۱ متیجه می شود که می توان بصورت برداری آنها را نوشت.

$$y_1(n)=-a_1\underbrace{y_1(n-1)}_{x_N(n)}-a_2\underbrace{y_1(n-2)}_{x_{N-1}(n)}-a_3 y_1(n-3)\cdots-\underbrace{a_N}_{x_2(n)}\underbrace{y_1(n-N)}_{x_1(n)}+R(n)$$

$$x_1(n+1)=x_2(n)$$

$$x_2(n+1)=x_3(n)$$

$$x_{N-1}(n+1)=x_N(n)$$

$$y_1(n)=x_N(n+1)=-a_1x_N(n)-a_2x_{N-1}(n)\cdots\cdots-a_Nx_1(n)+R(n)$$

$$① \begin{bmatrix} x_1(n+1)\\ x_2(n+1)\\ \vdots\\ x_N(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots\\0&0&1&\cdots\\ & & & \\ -a_N&\cdots&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(n)\\x_2(n)\\ \\x_N(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}R(n)$$

$$X(n+1)=A\,X(n)+B\,R(n)$$

از طرف دیگر داشتیم

$$\frac{Y_1(z)}{R(z)}=H_1(z)\Rightarrow\qquad H(z)=b_1z^{-1}H_1(z)+\cdots$$

$$Y(z)=\qquad b_1z^{-1}Y_1(z)+\cdots\Rightarrow y(n)=\qquad +b_1y_1(n-1)+\cdots$$

$$y(n)=b_1y_1(n-1)+b_2y_1(n-2)\cdots-b_My(n-M)$$

$$\therefore y_1(n-1)=x_N(n)$$ از طرفی

لذا می نویسیم

$$(2)\quad y(n) = [0 \; 0 \; \cdots \; 0 \; b_M \; b_{M-1} \; \cdots \; b_1] X(n)$$
$$y(n) = \quad C \; x(n)$$

از این معادلات به دو معادله برداری می رسیم

$$\begin{cases} x(n+1) = A X(n) + B R(n) \\ Y(n) = C X(n) \end{cases}$$

به این معادلات معادلات فضای حالت گسسته گفته می شود.

برای یک معدله تفاضلی گونه های مختلفی از معادلات فضای حالت می توان نوشت که ساختار داخلی متفاوت ولی از نظر ورودی خروجی معادلند. ساختاری که در بالا بدست آمد به نوع ۲ مستقیم *Direct II* شناخته می شود.

در مدل دیگر به روش ذیل عمل می گردد.

$$H(z) = \frac{\sum_{0}^{M} \ell z^{-\ell}}{1+\sum_{0}^{N} a_\ell z^{-\ell}} = b_0 + \frac{\sum_{1}^{M} \ell z^{-\ell}}{1+\sum_{1}^{N} a_\ell z^{-\ell}}$$

در اینجا نحوه تعریف متغیرهای حالت متفاوت است.

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) \cdots [\cdots + b_M R(n-M) + \cdots + b_1 R(n-1)]$$

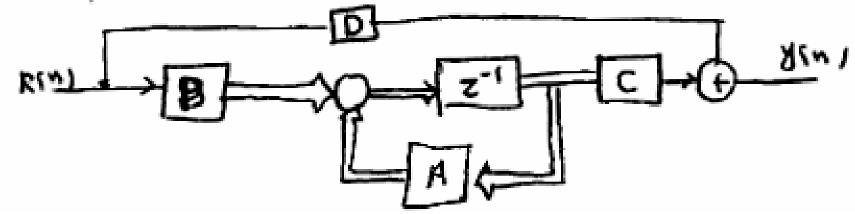
$$\Rightarrow y(z) = z^{-1}\Big[-a_1 \underbrace{y(z)}_{x_1(z)} + b_1 R(z) + z^{-1}\big[-a_2 y(z) + b_2 R(z) + z^{-1}[-a_3 y(z) + b_3 R(z) + \cdots$$

$$\Rightarrow x_1(n) = y(n)$$
$$x_1(n+1) = -a_1 x_1(n) + b_1 R(n) + x_2(n)$$
$$x_2(n+1) = -a_2 x_1(n) + b_2 R(n) + x_3(n)$$
$$x_M(n+1) = -a_M x_1(n) + b_M R(n) + x_{M+1}(n)$$
$$x_N(n+1) = -a_N x_1(n) +$$

حال معادلات حالت اینگونه بدست می آیند.

$$X(n+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & & \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & & & & \\ -a_M & \cdots & & 1 & \cdots \\ -a_N & \cdots & & 0 & \end{bmatrix} X(n) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_M \\ 0 \end{bmatrix} R(n)$$

$$y(n) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \, x(n)$$



۱-۴-۴ تغییر متغیرهای حالت در یک سیستم

ماتریس دلخواه $N*N$ معکوس پذیر P را در نظر بگیرید، به نحویکه متغیرهای جدید و قدیم حالت را بهم ارتباط دهد.

$$\hat{x}(n)=Px(n)\Rightarrow x(n)=P^{-1}\hat{x}(n)$$

معادلات فضای حالت برابر بودند با

$$x(n+1)=Ax(n)+BR(n)$$
$$y(n)=Cx(n)+DR(n)$$

از ضرب طرفین معادله در P بدست می آید.

$$P\,x(n+1)=P\,A\,x(n)+P\,B\,R(n)\Rightarrow \hat{x}(n+1)=PAP^{-1}\,\hat{x}(n)+P\,B\,R(n)$$
$$=\hat{A}\,\hat{x}(n)+\hat{B}\,R(n)$$
$$y(n)=C\,P\,\hat{x}(n)+D\,R(n)=\hat{C}\,\hat{x}(n)+D\,R(n)$$

هر دو معادله از دید ورودی - خروجی برابر بوده ولی از نظر حالتهای داخلی سیستم هر یک متغیرهای حالت متفاوت را نشان می دهند.
بنابراین برای یک سیستم متفاوت مدل فضای حالت می توان نوشت.
یکی از انواع مدل فضای حالت سیستم مدلی است که در آن ماتریس A قطری است این مدل در بخش های بعدی توضیح داده می شود.

مدل اختیاری فضای حالت

$$x(n+1)=A\,x(n)+B\,R(n)$$
$$y(n)=C\,x(n)+d\,R(n)$$

با در نظر گرفتن تبدیل z آن برابر است با

$$ZX(z)=A\,X(z)+BR(z)$$
$$Y(z)=C\,X(z)+d\,R(z)$$

روابط اخیر را می توان اینگونه ادامه داد.

$$(ZI-A)X(z)=BR(z)\Rightarrow$$

۲-۴-۴ تحلیل مدل فضای حالت در میدان Z

مدل فضای حالت و تبدیل z آنرا در نظر بگیرید.

$$x(n+1)=A\,x(n)+B\,R(n)$$
$$y(n)=C\,x(n)+d\,R(n)$$
$$ZX(z)=A\,X(z)+BR(z)$$
$$Y(z)=C\,X(z)+d\,R(z)$$

روابط اخیر را می توان اینگونه ادامه داد.

$$(ZI-A)X(z)=BR(z)\Rightarrow Y(z)=\left[C\,(zI-A)^{-1}B+d\right]R(z)\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=C(ZI-A)^{-1}B+d$$

که تابع تبدیل سیستم بدست می آید. $H(z)$ تابع کسری استکه مخرج آن را دترمینان $(zI-A)$ می سازد. بنابراین ریشه های دترمینان $(zI-A)$ قطبهای سیستم، و چند جمله ای دترمینان همان معادله مشخصه است. با این حساب می توان گفت که سیستم پایدار سیستمی است که در آن ریشه های دترمینان $zI-A$ داخل دایره واحد قرار گیرند. این ریشه ها برابر مقادیر ویژه ماتریس A که از دترمینان $\lambda I-A$ بدست می آیند می باشند.

اگر سیستم دارای شرایط اولیه $X(0)$ باشد، تبدیل Z آن برای سیستم علی اینگونه نوشته می شود.

$$ZX(z)-Z\,X(0)=A\,X(z)+B\,R(z)\Rightarrow (ZI-A)X(z)=Z\,X(0)+BR(z)\Rightarrow$$
$$Y(z)=C\,(ZI-A)^{-1}Z\,X(0)+\left[C\,(ZI-A)^{-1}+d\right]R(z)$$

۳-۴-۴ حل معادلات فضای حالت گسسته

حل این معادلات کما بیش مشابه حل معادلات تفاضلی است که از روش عکس تبدیل z نیز می توان استفاده نمود..

مثال: معادله فضای حالت، تابع تبدیل z، رفتار پایداری سیستم علی $y(n)=3y(n-1)-2y(n-2)+x(n)$ را به کمک ... بدست آورید. (شرایط اولیه صفر)

a) معادله مشخصه

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=+2,\ \lambda=1$$

پاسخ ضربه

$$h(n)=\alpha_1(+2)^n+\alpha_2(1)^n \qquad n\geq 0$$

$$y(0)=3y(0-1)-2y(0-2)+\delta(0)=1=\alpha_1+\alpha_2$$
$$y(1)=3y(0)-2y(-1)+\delta(1)=3=+2\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=2\\ \alpha_2=-1\end{cases}$$

$$h(n)=+2(-2)^n-1 \qquad n\geq 0$$

ریشه ها خارج دایره واحد و سیستم ناپایدار است.

b)

$$H(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{A_1}{(1-2z^{-1})}+\frac{A_2}{(1-z^{-1})}=\frac{-1}{1-z^{-1}}+\frac{2}{1-2z^{-1}}$$

$$\Rightarrow h(n)=-1+2(2)^n \qquad n\geq 0$$

$$z_1=1,\ z_2=2$$

سیستم ناپایدار

c)

$$y(n)=? \qquad H(z)=1+\frac{3z^{-1}-2z^{-2}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$v(n+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}v(n)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x(n)$$

$$y(n)=\begin{bmatrix}-2 & 3\end{bmatrix}v(n)+1\times x(n)$$

$$zI-A=\begin{bmatrix}z & -1\\ 2 & z-3\end{bmatrix} \Rightarrow \det(zI-A)=z(z-3)+2=z^2-3z+2$$

$$\Rightarrow z=-1,-2$$

سیستم ناپایدار

$$H(z)=\left[C(zI-A)^{-1}B+d\right]=\begin{bmatrix}-2 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{\begin{bmatrix}z-3 & 1\\ -2 & z\end{bmatrix}}{z^2-3z+2}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+1$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}-2z+6-6 & -2+3z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}{z^2-3z+2}+1=\frac{z^2-3z+2+3z-2}{z^2-3z+2}=\frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

که در قسمت B حل رفتار زمانی آن بدست آمد.

مسائل حل شده و خودآزمایی

مثال ۱: تبدیل z برای سیگنال علی $x(n)=[3(2)^n-4(3)^n]u(n)$ بدست آورید.

$$\left[\ X(z)=\frac{3}{1-2z^{-1}}-\frac{4}{1-3z^{-1}} \qquad ROC: |z|>3\ \right]$$

مثال ۲: تبدیل Z $x(n)=\cos(n\omega_0)u(n)$ را بدست آورید.

$$x(n)=\frac{1}{2}e^{jn\omega_0}u(n)+\frac{1}{2}e^{-jn\omega_0}u(n)$$

$$=\frac{1/2}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1/2}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}} \qquad ROC: |z|>1$$

مثال۳: تبدیل z سیگنال $x(n)=u(-n)$ را بدست آورید.

$$U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1 \Rightarrow \mathcal{Z}(x(-n))=X(z^{-1}) \Rightarrow \mathcal{Z}(u(-n))=U(z^{-1})$$

$$\Rightarrow x(n)=u(-n) \Rightarrow X(z)=U(z^{-1})=\left.\frac{1}{1-z^{-1}}\right|_{z=z^{-1}}=\frac{1}{1-z} \qquad |z|<1$$

چون سیگنال غیرعلی است.

مثال ۵: خطی، علی، مستقل از زمان، دینامیکی بودن سیستمهای ذیل را تحقیق کنید.

a) $y(n)=x(n)+x(n-1)$ b) $nx(n)$ c) $x(-n)$ d) $x(n^2)$

e) $x^2(n)$ f) $ax(n)+b$ g) $y(n)=y(n-1)+2x(n+4)$ h) $x(n)\cos n\omega$

[a) خطی علی، مستقل از زمان، دینامیکی b) خطی علی، وابسته به زمان، غیر دینامیکی c) خطی غیرعلی، وابسته به زمان، دینامیکی
d) خطی غیرعلی، وابسته به زمان، دینامیکی e) غیرخطی علی مستقل از زمان، غیردینامیکی f) غیرخطی علی مستقل از زمان، غیردینامیکی
g) خطی غیرعلی، مستقل از زمان، دینامیکی h) خطی علی، وابسته به زمان، غیردینامیکی]

(۶) پاسخ ضربه و پله معادله دیفرانس را از طریق حل معادله دیفرانس بدست آورید: $y(n)+0.7y(n-1)+0.1y(n-2)=x(n)$

$$\left[\ y(n)=-0.22(-0.2)^n+1.11(-0.5)^n+1.111 \quad , \quad h(n)=-1.34(-0.2)^n+2.33(-0.5)^n\ \right]$$

(۷) دنباله‌های $\{1, \underset{0}{3}, 2\}$ و $\{1, 2, 1, \underset{0}{4}, 1\}$ را با هم کانوالو کنید. همچنین چندجمله‌ای‌های $z+3+2z^{-1}$ و $z^3+2z^2+z+4+z^{-1}$ را در هم ضرب کرده نشان دهید نتیجه برابر ضرب متناظر می‌باشد.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 2 \\
\hline
 & & 2 & 4 & 2 & 8 & 2 \\
 & 3 & 6 & 3 & 12 & 3 & \\
1 & 2 & 1 & 4 & 1 & & \\
\hline
1 & 5 & 9 & 11 & 15 & 11 & 2
\end{array}$$

$$\{\underbrace{1, 5, 9, 11}_{\text{تعداد برابر جمع نقاط قبل از صفر هر دو دنباله } 3+1=4}, \underset{0}{15}, \underbrace{11, 2}_{\text{تعداد برابر جمع نقاط بعد از صفر هر دو دنباله}}\}$$

۸- تبدیل z و ناحیه همگرایی برای سیگنالهای ذیل را بدست آورید.

a) $\{1, 1, \underline{5}, 7, 0, 1\}$ b) $n^2 u(n)$ c) $a^n \cos(n\omega)u(n)$ d) $(0.25)^n u(n) - 4(4)^n u(-n-1)$

a) $X(z) = z^2 + z + 5 + 7z^{-1} + z^{-2}$ ROC: all $z - \{z=0, \infty\}$ b) $\frac{z^{-2}+z^{-1}}{(1-z^{-1})^3}$; $|z|>1$]

[c) $\frac{1/2}{1-ae^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1/2}{1-(ae^{j\omega_0})^{-1}z^{-1}}$ ROC: $|z|>|a|$ d) $\frac{1}{1-0.25z^{-1}} + \frac{4}{1-4z^{-1}}$ $4>|z|>0.25$

۹) تمام سیگنالهای ممکن با تبدیل $X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$ را بدست آورید.

[3] ROC: $|z|>2 \Rightarrow 2^n u(n) - (\frac{1}{3})^n u(n)$, ROC: $|z|<\frac{1}{3} \Rightarrow -2^n u(-n-1) + (\frac{1}{3})^n u(-n-1)$]

[ROC: $\frac{1}{3}<|z|<2 \Rightarrow -2^n u(-n-1) - (\frac{1}{3})^n u(n)$

۱۰) آیا تابع تبدیل $X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$ proper است؟ ادامه سیگنال $x(n)$ علی و غیر علی را بدست آورید. آیا این سیستم پایدار است.

[بله: در صورت از درجه کمتر است. علی $\Rightarrow x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 4, 7, 10, \ldots\}$,

[غیرعلی $\Rightarrow x(n) = \{\ldots, 11, 8, 5, 2, \underset{\uparrow}{0}\}$ در هر دو حالت ناپایدار است چون قطب روی دایره واحد مکرر است.

۱۱-مقدار اولیه و نهایی سیگنالهای ذیل را بدست آورید.

a) $X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$ b) $X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

[a) $x(0)=1$, $x(\infty)=\infty$; b) $x(0)=1$, $x(\infty)=6$] فرمول مقدار اولیه برای سیگنال علی و مقدار نهایی برای سیگنال پایدار معنی می‌دهد.

۱۱) از طریق تبدیل z پاسخ سیستم $y(n) + 0.7y(n-1) + 0.1y(n-2) = 2x(n)$ به ورودی $x(n) = 2^n u(n)$ با شرایط اولیه $y(-1)=1$ و $y(-2)=2$ بدست آورید.

[$0.1464(-0.2)^n + 0.5064(-0.5)^n + 1.45(2)^n$]

۱۲) همبستگی خودی $a^n u(n)$ را از طریق تبدیل z بدست آورید.

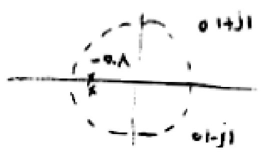
[$R_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}) = \underset{|z|>|a|}{\frac{1}{1-az^{-1}}} \cdot \underset{|z|<\frac{1}{|a|}}{\frac{1}{1-az}} = \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{-a^{-1}z^{-1}}{1-a^{-1}z^{-1}} = \frac{\frac{1}{1-a^2}}{1-az^{-1}} - \frac{\frac{1}{1-a^2}}{1-a^{-1}z^{-1}}$

$\Rightarrow r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2}(a^l u(l) + a^{-l}u(-l-1)) = \frac{1}{1-a^2} a^{|l|}$

۱۳) شرط K برای پایداری $X(z) = \frac{1}{1-kz^{-1}+0.72z^{-2}+0.32z^{-3}}$ را بدست آورید.

[$\frac{-1.82}{0.3} < k < 0.7$]

۱۴- موقعیت صفرها و قطبهای سیستمی با بهره واحد در شکل نشان داده شده است، تابع تبدیل آنرا بدست آورید. آیا این سیستم پایدار است؟



[$\frac{1.8^2}{1} \times \frac{(1-(1+j)z^{-1})(1-(1-j)z^{-1})}{(1+0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$]

(۱۵) برای سیستم $y(n)+0.7y(n-1)+0.1y(n-2)=2x(n)$ مدل فضای حالت بنویسید.

[$y(n)=[-0.2\ \ -1.4]x(n)+2R(n)$, $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-0.1&-0.7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}R(n)$]

(۱۶) سیستم فضای حالت $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0.5&k\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$ داده شده است. این سیستم به ازای چه مقدار K پایدار است.

[|k|,0.5]

(۱۷) با استفاده از تست پایداری محدوده K برای پایداری سیستم $\frac{1}{1+Kz^{-1}-0.5z^{-2}}$ را بدست آورید.

[$|k|<0.5$]

(۱۸) تابع تبدیل سیستمی را با فضای حالت $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-0.5&-0.2&-0.3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$, $y=[0\ \ 1\ \ 0]x$ نشان داده شده است را بدست آورید.

$$\left[\frac{z^{-2}}{1+0.3z^{-1}+0.2z^{-2}+0.5z^{-3}}\right]$$