۷

پیش بینی و فیلتر بهینه خطی

Linear Prediction and Optimal Filtering

۷-۱ سیگنال تصادفی

تحلیل آماری

۱. **تابع نمونه**: فرض کنید سیگنال مورد نظر توسط یک دستگاه اندازه گیری شده باشد و سیگنال *x1(n)* بدست آمده باشد، به سیگنال *x1(n)* یک تابع نمونه *sample function* می گویند.

۲. **فرایند تصادفی:** اگر دستگاههای دیگری نیز کمیت مورد نظر را اندازه گیری کرده باشند آنگاه سیگنالهای *x2(n)* و ... *xL(n)* بدست می آید. به مجموعه *S={x1(n),….,xL(n)}* تابع زمانی مجموعه، یا فرآیند تصادفی *Stochastic Process* می گویند و با *X(n,S)* نشان می دهند که به اختصار *X(n)* می نویسیم.

۳. **متغیر تصادفی:** دنباله های *x(n=i)* دنباله های متغیر تصادفی هستند.

۴. **گشتاورهای متغیر تصادفی :** اگر متفیر تصادفی *X(n=i)* چگالی احتمالی *Pxi(x,i)* داشته باشد، گشتاور *m* ام آن اینگونه بدست می آید.

$$E\left[X(i^m)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^m P_{xi}(x,i)dx$$

که میانگین آن

$$E\left[X(i\ \ )\right]=m_{X(i)}$$

و واریانس آن در *n=i*

$$\sigma_{X(i)}^2=E\left[X(i^2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_{xi}(x,i)dx$$

که $E[X(i)^2]$ امید ریاضی مربع سیگنالهای مجموعه *S* در زمان *n=i* است.

۵. **فرایند تصادفی مطلقا ایستا:** برای متغیرهای تصادفی *X(1)* و *X(2)* و ... می توان تابع چگالی احتمالی مشترک تعریف کرد. فرایند تصادفی *X(n)* **مطلقا ایستا** *Strict-sense Stationery* است اگر تابع چگالی احتمالی مشترک تابع (شیفت) نقاط *n* نباشد. یعنی اینکه

$$p_{X_1,X_2,X_3,\dots}(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots) = p_{X(1+m),X(2+m),X(3+m)}(x_{n(1+m)}, x_{n(2+m)}, x_{n(3+m)}, \dots)$$

۶. **فرایند تصادفی ایستای گسترده:** فرایند تصادفی *X(n)* را **ایستا گسترده** *Wide Sense Stationery* می خوانند اگر میانگین و تابع همبستگی آن مستقل از *n* باشند.

$$E(X(1)) = E(X(2)) = \dots = E(X(n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_{x_n}(x;n)\, dx = m_x$$

$$E[X_{n+l} X_n] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+l}\, x_n\, p_{X_{n+k} X_n}(x_{n+l}, x_n)\, dx_{n+l}\, dx_n = \varphi_{xx}(l)$$

در رابطه فوق *X* حقیقی فرض شد.

Example 2.2-1 Determine if the following process is wide-sense stationary.

$$x(t) = A \cos t + B \sin t \qquad \text{for } A \text{ and } B \text{ uncorrelated, zero mean, with variance } \sigma^2$$

$$m_x(t) = E\{A\} \cos t + E\{B\} \sin t = 0$$

$$\begin{aligned} R_x(t, k) &= E\{x(t)x(t+k)\} - m_x(t)m_x(t+k) = E\{x(t)x(t+k)\} \\ &= E\{(A \cos t + B \sin t)[A \cos (t+k) + B \sin (t+k)]\} \\ &= E\{A^2\} \cos t \cos (t+k) + E\{B^2\} \sin t \sin (t+k) \\ &= \sigma^2 \cos [t - (t+k)] \end{aligned}$$

or $\quad R_x(t, k) = R_x(k) = \sigma^2 \cos k$

Thus the process is wide-sense stationary.

۷. **همبستگی و واریانس خودی و متقابل:** دیگر روابطی که در حالت کلی می توان نوشت از اینقرارند.

خود همبستگی

$$\varphi_{xx}(n,m) = E(x_n, x_m^*) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_n x_m\, p_{X_n,X_m}(x_n, x_m)\, dx_n\, dx_m$$

کواریانس خودی

$$\gamma_{xx}(n,m) = E[(x_n - m_{x_n})(x_m - m_{x_m})^*]$$

$$\sigma_{x_n}^2 = \gamma_{xx}(n,n)$$

$$\gamma_{xx}(n,m) = \varphi_{xx}(n,m) - m_{x_n} m_{x_m}^*$$

$$\varphi_{xy}(n,m) = E[x_n y_m^*] \qquad \text{همبستگی متقابل}$$

$$\gamma_{xy}(n,m) = \varphi_{xy}(n,m) - m_{x_n} m_{y_m}^* \qquad \text{کواریانس متقابل:}$$

برای سیگنال استاسیونر به این روابط بدین گونه ساده می شوند

$$E(x(n)) = m_x$$

برای توان ها

$$\varphi_{xx}(l) = E[x(n+l)x^*(n)] \qquad \varphi_{xx}(l) = \varphi^*_{xx}(-l)$$

$$\gamma_{xx}(l) = E[(x(n+l)-m_x)(x(n)-m_x)^*] \qquad \gamma_{xx}(l) = \gamma^*_{xx}(-l)$$

$$\gamma_{xx}(l) = \varphi_{xx}(l) - |m_x|^2 \qquad \varphi_{xx}(0) = E[|x(n)|^2]$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \varphi_{xx}(0) - |m_x|^2$$

$$\gamma_{xy}(l) = \gamma^*_{yx}(-l)$$

اگر پریودیک نباشد: $\lim_{l\to\infty} \varphi_{xx}(l) = m_x m_x^*$

توان متوسط $P_x = E[|x(n)|^2] = \varphi_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2$

توابع همبستگی و کواریانس توابعی مزدوج متقارن هستند.

۸. **مستقل آماری :** اگر برای متغیرهای تصادفی x و y رابطه

$$P_{x,y}(x,y)=P_x(x)P_y(y)$$

برقرار باشد x و y مستقل آماری هستنداین امر محاسبات را ساده می کند و تابع چگالی مشترک را بصورت ضرب توابع چگالی متغیرهای تصادفی در آورده و محاسبه انتگرال چندگانه را به حاصل ضرب انتگرال های تک بدل می کند.

۹. **مستقل خطی:** اگر

$$E(xy) = E(x)E(y)$$

باشد x و y مستقل خطی یا غیر همبسته هستند. اگر x و y مستقل آماری باشند حتما مستقل خطی هستند ولـی عکـس آن صحیح نیست.

۱۰. **طیف توابع همبستگی و کواریانس**

$$S_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(l)\, e^{-j\omega l}$$

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(l)\, e^{-jl\omega}$$

$$P_x = E[|x(n)|^2] = \varphi_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)\, d\omega$$

اگر $x(n)$ حقیقی باشد S_{xx} و Γ_{xx} توابعی زوج خواهند بود این توابع اطلاعات فاز $x(n)$ را ندارند لذا براساس آنهـا نمـی تـوان $x(n)$ را باز سازی کرد.

۱۱. **تخمین توابع آماری سیگنال ارگودیک *Ergodic***: اگر سیگنالی ارگودیک باشد توابع و پارامترهای آماری را از یک تابع نمونه می توان بدست آورد .

$$\hat{m}_x = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^*(n)\, x(n+m)$$

می توان نشان داد که این دو تخمین وقتی $N\to\infty$ برود با واریانس صفر (احتمال ۱) به مقدار اصلی m_x و $\gamma_{xx}(m)$ میـل مـی کنند. مشروط برآنکه این دو کمیت مقدار محدودی داشته باشند.

در عمل اطلاعات موجود $x(n)$ به N محدود می شود لذا روابط اینگونه تغییر می یابد.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$r'_{xx}(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)\, x(n+m)$$

تخمین $r'_{xx}(m)$ تخمینی بی بایاس است

$$\lim_{N\to\infty} E(r'_{xx}(m)) = \varphi_{xx}(m)$$

و $\underset{N\to\infty}{Var}(r'_{xx}(m))$ به سمت صفر می رود. ولی مقدار واریانس برای mهای بزرگ (نزدیک N) نسبتا بزرگ مـی گـردد. لـذا از رابطه تخمینی دیگری استفاده می شود.

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)\, x(n+m)$$

این رابطه جدید دارای بایاس است

$$E(r_{xx}(m)) = \left(1-\frac{|m|}{N}\right)\gamma_{xx}(m)$$

. این رابطه وقتی $N\to\infty$ میل میکند واریانس کمتری دارد

$$\lim_{N\to\infty} E(r_{xx}(m)) = \varphi_{xx}(m)$$

و تخمین معتبری از $\varphi_{xx}(m)$ را می دهد. در نتیجه میانگین و خود همبستگی با

$$\begin{cases} \hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \\ r_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)\, x(n+m) \end{cases}$$

تخمین زده می شود. مفروضات این تخمین آن بود که $x(n)$ حداقل از نظر میانگین و خودهمبستگی ایستا و ارگودیک باشد.

۱۲. **فرایند و نویز سفید:** به فرایندی که در آن

$$E(x(m), x(n)) = \begin{cases} \sigma_x^2 & m=N \\ m_x^2 & m\neq N \end{cases}$$

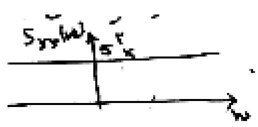
باشد فرایند تصادفی سفید می گویند که در آن

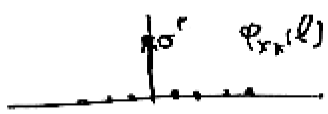
$$\varphi_{xx}(\ell) = \sigma^2\delta(\ell) + m_x^2$$

$$S_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 + 2\pi m_x^2\,\delta(\omega)$$

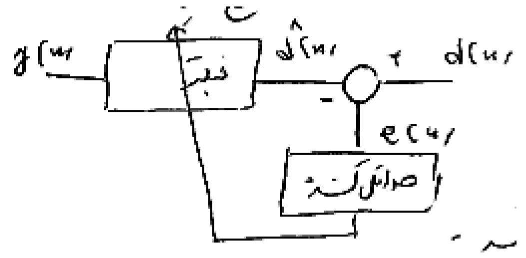
است فرایند سفیدی که میانگین آن صفر باشد نویز سفید خوانده می شود.

$$m_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{xx}(l) = \sigma^2 \delta(l) \\ S_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 \end{cases}$$





۲-۷ فیلتر وینر *Wiener Filter*



سیگنال آلوده به نویز *y(n)* و سیگنال مطلوب *d(n)* فرضا داده شده است. هدف طرح فیلتری است که سیگنال *y(n)* را فیلتر کرده به نحوی که خطای *e(n)* حداقل گردد.

در این بحث فیلتر خطی در نظر گرفته می شودو خطا *e(n)* به نحو بهینه ای حداقل می شود. از اینرو به این فیلتر، فیلتر بهینه خطی *Linear Optimum Filter* می گویند. برای حداقل کردن از روش حداقل مربعات خطا استفاده می شود

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n)$$

$$= d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(n-k) \quad \Rightarrow J = E\left(e(n)\, e^*(n)\right) = E\left(|e(n)|^2\right) \quad n = 0, \dots, \infty$$

فیلتر می تواند *FIR* یا *IIR* باشد.که در اینجا فیلتر *FIR* استفاده شده است.

$$\Rightarrow J = E\left[\left(d(n) - \varphi'(n-k)\,\theta\right)'\left(d(n) - \varphi'(n-k)\,\theta\right)\right]$$

$$\theta' = [a_0, a_1, \dots, a_{M-1}], \quad \varphi'(n-k) = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-M+1)]$$

$$\Rightarrow J = E\left(|d(n)|^2\right) - E\left(d(n)\varphi'(n-k)\right)\theta - \theta' E\left(\varphi(n-k)\, d(n)\right) + \theta' E\left(\varphi(n-k)\varphi'(n-k)\right)\theta$$

از حداقل کردن *J* نسبت به پارامترها رابطه *Wiener-Hopf* بدست می آید.

$$= \sigma_d^2 - p'\theta - \theta' p + \theta' R\, \theta \quad \Rightarrow \frac{dJ}{d\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = R^{-1} p \quad \Rightarrow$$

و مقدار حداقل خطا برابر مقدار ذیل می شود.

$$J_{min} = \sigma_d^2 - p' R^{-1} p$$

در این رابطه *R* ماتریس همبستگی خودی *y* و *P* بردار همبستگی متقابل *d* و *y* است.

$$R = \begin{bmatrix} r_{yy}(0) & & r_{yy}(M-1) \\ & & \\ r_{yy}(M-1) & & r_{yy}(0) \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} r_{dy}(0) \\ \vdots \\ r_{dy}(M-1) \end{bmatrix}$$

فیلتر محاسبه شده بهینه خواهد بود اگر مشخصات آماری مفروض، مطابق واقع باشد. در غیر اینصورت جواب بهینه نیست. در عمل بهینه بودن به دقت مشخصات آماری *y* و *d* (*R,P*) که ارائه می شوند بستگی دارد. . از انجا که فقط یک تابع نمونه از مشاهدات *sample function* وجود دارد، تخمین به شرط ارگودیک بودن فرایند معتبر است

در فرض فیلتر وینر ثابت بودن مشخصات آماری سیگنال و نویز وجود دارد به این معنی که مشخصات سیگنال باید ثابت با زمان و نویز ایستا باشد. این فرض اگر محقق نگردد جواب بهینه نیست. در بسیاری از کاربردها مشخصات آماری *d* و *y* با زمان تغییر می کند بنابراین باید از روشهای وفقی برای دسترسی به جواب بهینه سود برد که تغییرات مشخصات آماری را دنبال می

کند.

اصل تعامد *Orthogonality Principle*

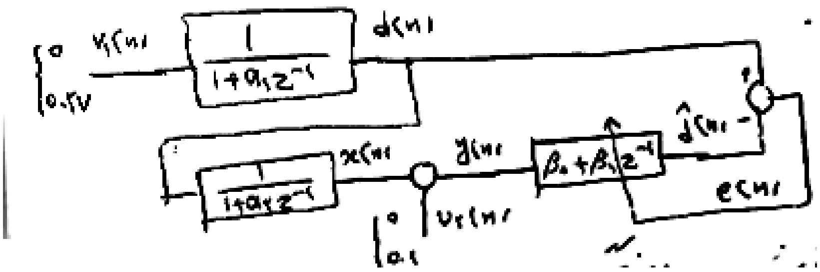
اگر حداقل *e(n)*، *e0(n)* باشد، بر تمامی ورودیهایی که در فرایند تخمین وارد می شوند عمود است.

$$j = E(e^2(n)) \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial a_k} = E\left(2\frac{\partial e(n)}{\partial a_k}e(n)\right) = -2E(y(n-k)e_0(n)) = 0$$

به این ترتیب

$$E(\hat{d}(n)e(n)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k E(y(n-k)e(n)) \Rightarrow E[\hat{d}_0(n)e(n)] = 0$$

مثال : نویز سفید *v1(n)* از سیستم درجه ۱ با *a1=0.8485* عبور کرده و سیگنال *d(n)* بدست آمده است. سیگنال *d(n)* از کانالی درجه ۱ با *a2=0.9458* عبور کرده و نویز سفید *v2(n)* به آن اضافه شده و دریافت گردیده است. *d(n)* را از خروجی *y(n)* با فیلتری ۲ پارامتری تخمین بزنید.



$$e(n) = d(n) - \beta_0 y(n) - \beta_1 y(n-1) \quad , \theta = \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{\theta} = R_y^{-1} P_{dy} \quad ; \quad R_y = \begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(1)\\ r_y(1) & r_y(0)\end{bmatrix} \quad , P = \begin{bmatrix} r_{dy}(0)\\ r_{dy}(1)\end{bmatrix}$$

با فرض مستقل بودن *v1(n)* و *v2(n)* بدست می آوریم

$$R_y = R_{v2} + R_x \qquad R_{v2} = \begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix} \quad , R_{v1} = \begin{bmatrix}0.27 & 0\\ 0 & 0.27\end{bmatrix}$$

$$x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) = u(n)$$

طبق روابط

$$r_x(0) = \frac{1+a_2}{1-a_2}\,\frac{\sigma_{v1}^2}{(1+a_2)^2 - a_1^2} = 1 \qquad , r_x(1) = \frac{-a_1}{1+a_2} = 0.5 \Rightarrow R_y = \begin{bmatrix}1.1 & 0.5\\ 0.5 & 1.1\end{bmatrix}$$

$$r_{dy}(k) = E(y(n+k)d(n)) = E(x(n+k)d(n))$$

$$=E[x(n+k)[x(n)+a_2x(n-1)]]=r_{xx}(k)+a_2r_{xx}(k-1)$$

$$\Rightarrow r_{dy}(0) = r_{xx}(0) + a_2 r_{xx}(-1) = 1 - 0.9458 \times 0.5 = 0.5272$$

$$r_{dy}(1) = r_{xx}(1) + a_2 r_{xx}(0) = 0.5 - 0.9458 \times 1 = -0.4458$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0.5272 \\ -0.4458 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5272 \\ -0.4458 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8360 \\ -0.7853 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{min} = 0.1579$$

۳-۷ پیش بینی خطی *Linear Prediction*

در *LP* قرار است بر اساس *{y(0),…., y(n-1)}* تخمینی از *y(n)* تعیین گردد. مسئله بصورت ذیل طرح و حل می شود.

$$\hat{y}(n)=\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)$$

$$e(n)=y(n)-\hat{y}(n)=y(n)-\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)=y(n)-\varphi'(n,k)\theta$$

$$\Rightarrow \theta=R^{-1}P \qquad \theta'=[a_1,\dots a_{M-1}], \quad \varphi'(n,k)=[y(n-1),\dots y(n-M+1)]$$

$$R=\begin{bmatrix} r_y(0) & & r_y(M-2) \\ & & \\ r_y(M-2) & & r_y(0)\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} r(1) \\ \\ r(M-1)\end{bmatrix}$$

به این روش *Forward LP* گفته می شود.

در *Backward LP* تخمین *y(M)* بر اساس مشاهدات آینده فرموله می شود.

$$y(n-M)=\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k+1) \Rightarrow e(n)=y(n-M)-\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k+1)$$

$$=y(n-M)+\varphi'\theta$$

$$\varphi'=[y(n),y(n-1),\dots\ y(n-M+1)] \quad \theta'=[a_1,\dots a_M]$$

$$\hat{\theta}=R^{-1}P \quad , P=\begin{bmatrix} r(M) \\ \vdots \\ r(1)\end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix} r(0) & & r(M-1) \\ & & \\ r(M-1) & & r(0)\end{bmatrix}$$

۴-۷ فیلتر کالمن *Kalman Filter*

فیلتر کالمن حالت کلی تر فیلتر وینر است که بصورت فضای حالت نوشته می شود ضمن اینکه حل معادلات بصورت بازگشتی است

راه حل بازگشتی برای *Minimum Mean Squares*

فرض کنید مشاهدات *Yn={y(1),….,y(n)}* با فرض *y(n<0)=0* در اختیار باشد هدف تخمینی $\hat{x}(n\,|\,Yn)$ به روش بازگشتی به فرض وجود $\hat{x}(n-1\,|\,Y_{n-1})$ است. ارتباط بین *y* و *x* خطی در نظر گرفته می شود.

برای این منظور متغیر $\alpha(n) = y(n) - \hat{y}x(n\,|\,Yn)$ تعریف می گردد. که در آن

$$\hat{y}(n\,|\,Yn) = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k y(n-k)$$

است اگر *LS* برای *α(n)* محاسبه شود پارامترهای *βk* تعیین می گردند با توجه به معلوم بودن مشاهدات *y(n)* و *βk* می توان *α(n)* را داشت و اگر *α(n)* و *βk* معلوم باشند *y(n)* قابل محاسبه است.

حال اگر مدل خطی بین *x* و *y* در نظر گرفته شود

$$\hat{x}(n\,|\,Yn) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y(k)$$

آنرا به ترم α نیز می توان نوشت.

$$\hat{x}(n\,|\,Yn) = \sum_{k=1}^{n} b_k \alpha(k)$$

که پارامترهای *bk* از حداقل سازی

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n\,|\,y_n)$$

بدست آمده باشد که

$$b_k = \frac{E(x(n)\,\alpha(k))}{E(\alpha(k)\,\alpha(k))} \qquad 1 \leq k \leq n$$

می شود. این رابطه را بصورت بازگشتی می توان نوشت که

$$\hat{x}(n\,|\,y_n) = \hat{x}(n-1\,|\,y_{n-1}) + b_n\left(y_n - \hat{y}(n\,|\,y_n)\right)$$

$$b_n = \frac{E(x(n)\,\alpha(n))}{E(\alpha(n)\,\alpha(n))}$$

باشد. این اساس معادلات بازگشتی است که کاربرد گسترده ای دارد.

فیلتر کالمن

مدل ذیل را برای سیستم در نظر بگیرید.

x(n+1)=Ax(n)+v1(n)
y(n)=cx(n)+v2(n)

که در آن *x (N*1)*، *y (1*1)*، *v1(n)* نویز سفید *(N*1)* و *v2(n)* نیز نویز سفید *(1*1)* است.

بردار مشاهدات $Yn=\{y(1),\ldots,y(n)\}$ است.

هدف تخمین $\hat{x}(i|Yn)$ است. اگر $i>n$ باشد الگوریتم کار پیش بینی، اگر $i=n$ باشد عمل فیلتر کردن و اگر $0<i<n$ باشد کار هموار سازی *smoothing* را انجام می دهد.

برای این منظور $\alpha(n)$ که *innovation sequence* خوانده می شود تعریف می گردد.

$$\alpha(n)=y(n)-\hat{y}(n|Yn)=y(n)-C\hat{x}(n|Yn)+\hat{v}_1(n)$$
$$=C[x(n)-\hat{x}(n|Yn)]+v2(n)=Ce(n)+v2(n)$$

مدل خطی تخمین

$$\hat{x}(i|Yn)=\sum_{k=1}^{n} b_i(k)\alpha(k)$$

و تابع خطا از این قرار هستند.

$$e(n)=x(n)-\hat{x}(n|Yn)$$
$$e(i,n)=x(i)-\hat{x}(i|Yn)=x(i)-\sum_{k=1}^{n} b_i(k)\alpha(k)$$

با حداقل کردن خطا به روش *Minimum Mean Aquare Errirs(MMSE)* بدست می آید.

$$E(|\alpha(m)|^2)\, b_i(m)=E[x(i)\alpha(m)]\Rightarrow \qquad R(m)\, b_i(m)=P_{x,\alpha}(I,m) \Rightarrow$$
$$b_i(m)=R^{-1}(m)\, P_{x,\alpha}(I,m)$$

با جایگزینی در رابطه $\hat{x}(i|Yn)$ بدست می آید.

$$\hat{x}(i|Yn)=\sum_{k=1}^{n-1} R^{-1}(k)P_{x,\alpha}(i,k)\alpha(k)+R^{-1}(n)P_{x,\alpha}(i,n)\alpha(n)$$

برای $i=n+1$ که حالت پیش بینی است خواهیم داشت

$$\hat{x}(n+1|Yn)=\sum_{k=1}^{n-1} R^{-1}(k)P_{x,\alpha}(n+1,k)\alpha(k)+R^{-1}(n)P_{x,\alpha}(n+1,n)\alpha(n)$$

برای اینکه $\hat{x}(n+1|Yn)$ را بر اساس $\hat{x}(n|Yn-1)$ می نویسیم

$$E[x(n+1)\alpha(k)]=E[\{A\, x(n)+v1(n)\}\alpha(k)]=A\, E[x(n)\alpha(k)] \qquad \Rightarrow$$
$$P_{x,\alpha}(n+1,k)=A\, P_{x,\alpha}(n,k) \qquad \Rightarrow$$
$$\hat{x}(n+1|Yn)=A\, \hat{x}(n|Yn-1)+R-1(n)Px,\alpha(n+1,n)\alpha(n)\Rightarrow$$

$$\hat{x}(n+1|Yn)=A\, \hat{x}(n|Yn-1)+G(n)\alpha(n)$$

که بهره کالمن برابر است با

$$G(n)=R_{-1}(n)P_{x,\alpha}(n+1,n)=R_{-1}(n)E[x(n+1)\alpha(n)]$$

به این ترتیب فرمول محاسبه بازگشتی $\hat{x}(n+1)$ بدست می آید.

برای اینکه این روش قابل استفاده باشد روش مناسبی برای تعیین $G(n)$ باید ارائه شود.

$$E[x(n+1)\alpha(n)]=A\, E[x(n)\alpha(n)]=A\, E[x(n)e'(n,n-1)]\, C'$$
$$=A\, E[\{e(n,n-1)+\hat{x}(n|Yn-1)\}\, e'(n,n-1)]\, C'$$
$$=A\, E[e(n,n-1)e'(n,n-1)]\, C'=A\, K(n,n-1)\, C'\Rightarrow$$
$$G(n)=A\, K(n,n-1)\, C'\, R^{-1}(n)$$

برای قابل استفاده بودن روش k نیز باید به روش بازگشتی قابل محاسبه گردد.

K(n,n-1)=E[e(n,n-1)e'(n,n-1)]

که بصورت ذیل بدست می آید.

K(n+1,n)=A K(n) A' +Q1(n)

K(n)=K(n,n-1)-AG(n)CK(n,n-1)

که در آن *Q1(n)* ماتریس همبستگی خودی نویز *v1(n)* است.

به این ترتیب روابط فیلتر کالمن بدست می آید. روابط ذیل برای سیستم وابسته به زمان نوشته شده است.

Variable	Definition	Dimension
$\mathbf{x}(n)$	State vector at time n	M-by-1
$\mathbf{y}(n)$	Observation vector at time n	N-by-1
$\mathbf{F}(n+1, n)$	State transition matrix from time n to $n+1$	M-by-M
$\mathbf{C}(n)$	Measurement matrix at time n	N-by-M
$\mathbf{Q}_1(n)$	Correlation matrix of process noise vector $\mathbf{v}_1(n)$	M-by-M
$\mathbf{Q}_2(n)$	Correlation matrix of measurement noise vector $\mathbf{v}_2(n)$	N-by-N
$\hat{\mathbf{x}}(n+1\|\mathcal{Y}_n)$	Predicted estimate of the state vector at time $n+1$, given the observation vectors $\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \ldots, \mathbf{y}(n)$	M-by-1
$\hat{\mathbf{x}}(n\|\mathcal{Y}_n)$	Filtered estimate of the state vector at time n, given the observation vectors $\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \ldots, \mathbf{y}(n)$	M-by-1
$\mathbf{G}(n)$	Kalman gain at time n	M-by-N
$\boldsymbol{\alpha}(n)$	Innovations vector at time n	N-by-1
$\mathbf{R}(n)$	Correlation matrix of the innovations vector $\boldsymbol{\alpha}(n)$	N-by-N
$\mathbf{K}(n+1, n)$	Correlation matrix of the error in $\hat{\mathbf{x}}(n+1\|\mathcal{Y}_n)$	M-by-M
$\mathbf{K}(n)$	Correlation matrix of the error in $\hat{\mathbf{x}}(n\|\mathcal{Y}_n)$	M-by-M

TABLE 7.2 SUMMARY OF THE KALMAN FILTER BASED ON ONE-STEP PREDICTION

Input vector process

Observations = $\{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \ldots, \mathbf{y}(n)\}$

Known parameters

State transition matrix = $\mathbf{F}(n+1, n)$

Measurement matrix = $\mathbf{C}(n)$

Correlation matrix of process noise vector = $\mathbf{Q}_1(n)$

Correlation matrix of measurement noise vector = $\mathbf{Q}_2(n)$

Computation: $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathbf{G}(n) = \mathbf{F}(n+1, n)\mathbf{K}(n, n-1)\mathbf{C}^H(n)[\mathbf{C}(n)\mathbf{K}(n, n-1)\mathbf{C}^H(n) + \mathbf{Q}_2(n)]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n) = \mathbf{F}(n+1, n)\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + \mathbf{G}(n)\boldsymbol{\alpha}(n)$$

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{K}(n, n-1) - \mathbf{F}(n, n+1)\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\mathbf{K}(n, n-1)$$

$$\mathbf{K}(n+1, n) = \mathbf{F}(n+1, n)\mathbf{K}(n)\mathbf{F}^H(n+1, n) + \mathbf{Q}_1(n)$$

Initial conditions:

$$\hat{\mathbf{x}}(1|\mathcal{Y}_0) = E[\mathbf{x}(1)]$$

$$\mathbf{K}(1, 0) = E[(x(1) - E[x(1)])(x(1) - E[x(1)])^H] = \Pi_0$$